ЛОГАРИФМЫ

ВЫРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

учебное пособие для школьников и поступающих в вузы

Автор
Трепачёв Дмитрий

2026 год, v1.0.0

Введение

Всем привет! Меня зовут Трепачёв Дмитрий. Я работаю репетитором по математике, физике и информатике с 2010 года. За это время через мои занятия прошли сотни учеников — от пятиклассников, которые только начинают знакомиться с алгеброй, до выпускников, готовящихся к ЕГЭ и поступлению в вузы.

Эту книгу я сделал для своих занятий. Почему именно логарифмы? Потому что это одна из самых важных и одновременно самых пугающих тем в школьной математике. Логарифмы появляются в 10-11 классах, и у многих учеников начинается паника: новые обозначения, непонятные свойства, странные графики... Но на самом деле логарифмы — это просто другой способ записи знакомых нам показательных уравнений.

В школьных учебниках логарифмические выражения обычно изучаются постепенно: сначала определение, потом свойства, потом преобразования. Но часто эти темы разбросаны по разным параграфам, и ученику трудно увидеть общую картину. Да и задач на отработку каждого свойства обычно не хватает.

В этой книге я собрал все основные приёмы работы с логарифмическими выражениями в одном месте:

- определение логарифма и простейшие свойства;
- основное логарифмическое тождество;
- логарифм произведения, частного, степени, корня;
- переход к новому основанию;
- упрощение выражений с одним и несколькими логарифмами;
- приведение к одному основанию;
- выражения с натуральными логарифмами;
- доказательство тождеств;
- сравнение логарифмов.

Каждой группе свойств посвящена отдельная глава с теорией, подробными примерами и большим количеством задач. После каждого логического блока есть обобщающая глава-практика, а в конце — итоговая глава «Практика на все-все приёмы», где собраны задачи всех типов вперемешку.

Особое внимание в книге уделяется не механическому запоминанию формул, а пониманию логики их вывода и связей между ними. Я показываю, как все свойства выводятся из определения логарифма, и учу применять их в различных комбинациях.

Эта книга пригодится не только моим ученикам, но и всем, кто хочет разобраться в теме самостоятельно. А ещё я буду рад, если другие репетиторы станут использовать её на своих занятиях — берите свободно, пользуйтесь, задавайте побольше примеров своим ученикам.

Больше моих книг вы можете найти на сайте books.mrepetitor.com. Там есть и другие пособия по математике и физике — всё, что я наработал за годы преподавания, а также научно-популярные книги, написанные мною для тех учеников, которые хотят знать больше про историю науки и окружающий мир.

Записаться на мои занятия можно на сайте study.mrepetitor.com. Я преподаю математику и физику для школьников с 5 по 11 классы, готовлю к ЕГЭ, ОГЭ и ЦТ. Если вам или вашему ребёнку нужна помощь — милости прошу!

Удачи в изучении математики!

Дмитрий Трепачёв

Оглавление

1 Определение логарифма **8**
1.1 Теория 8
Пример 1. Нахождение логарифма по определению 8

Пример 2. Логарифм с дробным результатом . . . 8
Пример 3. Логарифм с отрицательным результатом . . . 9
Пример 4. Логарифм с результатом, равным нулю . . . 9
Пример 5. Обратная задача: нахождение числа по логарифму . . . 9
Пример 6. Нахождение основания . . . 9
Пример 7. Проверка области определения . . . 9
Пример 8. Ещё пример с дробным основанием . . . 9
1.2 Задачи . . . 9

2 Основное логарифмическое тождество **11**
2.1 Теория . . . 11
Пример 1. Простейшее применение . . . 11
Пример 2. Степень с логарифмом в показателе . . . 11
Пример 3. Когда основание степени и логарифма разные . . . 11
Пример 4. Выражение с корнем . . . 12
Пример 5. Обратное применение . . . 12
Пример 6. Ещё один пример с суммой . . . 12
Пример 7. Выражение с коэффициентом . . . 12
Пример 8. Сложный случай . . . 12
Пример 9. Когда в результате получается дробь . . . 12
Пример 10. Проверка области определения . . . 12
2.2 Задачи . . . 13

3 Логарифм единицы и логарифм основания **14**
3.1 Теория . . . 14
Пример 1. Логарифм единицы . . . 14
Пример 2. Логарифм основания . . . 14
Пример 3. Логарифм степени основания . . . 14
Пример 4. Ещё пример со степенью . . . 14
Пример 5. Отрицательная степень . . . 15
Пример 6. Дробная степень . . . 15
Пример 7. Корень как степень . . . 15
Пример 8. Комбинация свойств . . . 15
Пример 9. Выражение с разными основаниями . . . 15
Пример 10. Упрощение выражения . . . 15
3.2 Задачи . . . 15

4 Десятичные и натуральные логарифмы **17**
4.1 Теория . . . 17
Пример 1. Вычисление десятичного логарифма . . . 17
Пример 2. Десятичный логарифм степени десяти . . . 17
Пример 3. Десятичный логарифм произведения . . . 17
Пример 4. Натуральный логарифм . . . 18
Пример 5. Натуральный логарифм степени e . . . 18
Пример 6. Натуральный логарифм корня . . . 18
Пример 7. Переход от десятичного к натуральному . . . 18
Пример 8. Вычисление с помощью калькулятора . . . 18
Пример 9. Упрощение выражения с разными логарифмами . . . 18
Пример 10. Выражение с числом e в степени . . . 18
4.2 Задачи . . . 19

5 Логарифм произведения **20**
5.1 Теория . . . 20
Пример 1. Прямое применение . . . 20
Пример 2. Вычисление с помощью свойства . . . 20

Пример 3. Упрощение выражения . . . 20
Пример 4. Три множителя . . . 21
Пример 5. Обратное применение . . . 21
Пример 6. Степень как произведение . . . 21
Пример 7. Упрощение с десятичными логарифмами . . . 21
Пример 8. Сложный случай с корнями . . . 21
5.2 Задачи . . . 21

6 Логарифм частного **23**
6.1 Теория . . . 23
Пример 1. Прямое применение . . . 23
Пример 2. Вычисление с помощью свойства . . . 23
Пример 3. Упрощение выражения . . . 23
Пример 4. Обратное применение . . . 24
Пример 5. Комбинация с произведением . . . 24
Пример 6. Несколько действий . . . 24
Пример 7. Упрощение с десятичными логарифмами . . . 24
Пример 8. Сложный случай с корнями . . . 24
Пример 9. Выражение с переменными . . . 25
6.2 Задачи . . . 25

7 Логарифм степени **27**
7.1 Теория . . . 27
Пример 1. Прямое применение . . . 27
Пример 2. Обратное применение . . . 27
Пример 3. Логарифм корня . . . 27
Пример 4. Отрицательная степень . . . 27
Пример 5. Дробная степень . . . 28
Пример 6. Комбинация свойств . . . 28
Пример 7. Выражение с корнем . . . 28
Пример 8. Сложный случай . . . 28
Пример 9. Выражение с переменными . . . 28
7.2 Задачи . . . 29

8 Логарифм корня **31**
8.1 Теория . . . 31
Пример 1. Квадратный корень . . . 31
Пример 2. Кубический корень . . . 31
Пример 3. Корень четвёртой степени . . . 31
Пример 4. Корень из степени . . . 32
Пример 5. Корень из произведения . . . 32
Пример 6. Корень из частного . . . 32
Пример 7. Сложный корень . . . 32
Пример 8. Выражение с переменными . . . 32
8.2 Задачи . . . 32

9 Переход к новому основанию **35**
9.1 Теория . . . 35
Пример 1. Переход к десятичному логарифму . . . 35
Пример 2. Переход к натуральному логарифму . . . 35
Пример 3. Вычисление с помощью калькулятора . . . 35
Пример 4. Следствие 1 . . . 36
Пример 5. Следствие 2 . . . 36
Пример 6. Следствие 3 . . . 36
Пример 7. Приведение к одному основанию . . . 36

Пример 8. Сложный случай . . . 36
Пример 9. Выражение с разными основаниями . . . 36
9.2 Задачи . . . 37

10 Практика по блоку 2 **39**
10.1 Теория . . . 39
10.2 Задачи . . . 39

11 Упрощение выражений с одним логарифмом **41**
11.1 Теория . . . 41
Пример 1. Произведение под логарифмом . . . 41
Пример 2. Частное под логарифмом . . . 41
Пример 3. Степень под логарифмом . . . 41
Пример 4. Корень под логарифмом . . . 42
Пример 5. Комбинация всех свойств . . . 42
Пример 6. Выражение с разными основаниями . . . 42
Пример 7. Логарифм от логарифма (нестандартный случай) . . . 42
Пример 8. Упрощение с переменными . . . 42
11.2 Задачи . . . 42

12 Упрощение выражений с несколькими логарифмами **45**
12.1 Теория . . . 45
Пример 1. Сумма логарифмов . . . 45
Пример 2. Выражение с коэффициентами . . . 45
Пример 3. Выражение с разными основаниями . . . 45
Пример 4. Выражение с числами . . . 46
Пример 5. Сумма трёх логарифмов . . . 46
Пример 6. Произведение логарифмов . . . 46
Пример 7. Выражение с разными основаниями и числами . . . 46
Пример 8. Сложная комбинация . . . 46
Пример 9. Выражение с логарифмами от логарифмов . . . 46
12.2 Задачи . . . 47

13 Приведение к одному основанию **49**
13.1 Теория . . . 49
Пример 1. Сумма логарифмов с разными основаниями . . . 49
Пример 2. Разность логарифмов с разными основаниями . . . 49
Пример 3. Произведение логарифмов с разными основаниями . . . 50
Пример 4. Выражение с тремя разными основаниями . . . 50
Пример 5. Выражение с корнями в основаниях . . . 50
Пример 6. Выражение со степенями в основаниях . . . 50
Пример 7. Выражение с десятичными и натуральными логарифмами . . . 50
Пример 8. Сложное выражение . . . 50
13.2 Задачи . . . 50

14 Выражения с натуральными логарифмами **52**
14.1 Теория . . . 52
Пример 1. Простейшие выражения . . . 52
Пример 2. Произведение и частное . . . 52
Пример 3. Степени под логарифмом . . . 52
Пример 4. Корни под логарифмом . . . 53
Пример 5. Выражения с числом e . . . 53
Пример 6. Переход от натуральных к десятичным . . . 53
Пример 7. Сложное выражение с натуральными логарифмами . . . 53
Пример 8. Выражение с переменными . . . 53

14.2 Задачи . . . 53

15 Доказательство тождеств **56**

15.1 Теория . . . 56

Пример 1. Простейшее тождество . . . 56

Пример 2. Тождество с переходом к новому основанию . . . 56

Пример 3. Более сложное тождество . . . 56

Пример 4. Тождество с суммой логарифмов . . . 56

Пример 5. Тождество со степенью . . . 57

Пример 6. Тождество с корнем . . . 57

Пример 7. Тождество с разными основаниями . . . 57

Пример 8. Сложное тождество . . . 57

15.2 Задачи . . . 57

16 Практика по блоку 3 **59**

16.1 Теория . . . 59

16.2 Задачи . . . 59

17 Сравнение логарифмов с одинаковыми основаниями **61**

17.1 Теория . . . 61

Пример 1. Сравнение при $a > 1$ . . . 61

Пример 2. Сравнение при $0 < a < 1$ . . . 61

Пример 3. Сравнение с нулём . . . 61

Пример 4. Сравнение с единицей . . . 62

Пример 5. Расположение в порядке возрастания . . . 62

Пример 6. Сравнение с промежуточным числом . . . 62

Пример 7. Доказательство неравенства . . . 62

17.2 Задачи . . . 62

18 Сравнение логарифмов с разными основаниями **64**

18.1 Теория . . . 64

Пример 1. Сравнение с помощью приведения к общему основанию . . . 64

Пример 2. Сравнение с помощью промежуточного числа . . . 64

Пример 3. Сравнение с помощью перехода к натуральным логарифмам . . . 64

Пример 4. Сравнение с нулём . . . 65

Пример 5. Сравнение с единицей . . . 65

Пример 6. Метод рационализации . . . 65

Пример 7. Графический метод . . . 65

18.2 Задачи . . . 65

19 Сравнение логарифмов с числами **67**

19.1 Теория . . . 67

Пример 1. Сравнение с 0 . . . 67

Пример 2. Сравнение с 1 . . . 67

Пример 3. Сравнение с 2 . . . 68

Пример 4. Сравнение с помощью возведения в степень . . . 68

Пример 5. Сравнение с целым числом . . . 68

Пример 6. Оценка суммы логарифмов . . . 68

Пример 7. Сравнение с помощью свойств . . . 68

19.2 Задачи . . . 68

20 Практика по блоку 4 **70**

20.1 Теория . . . 70

20.2 Задачи . . . 70

21 Практика на все-все приёмы **72**

21.1 Теория 72
21.2 Задачи 72

Определение логарифма

Теория

В этой главе мы познакомимся с новым математическим понятием — логарифмом. Оно возникает из показательных уравнений.

Откуда берётся логарифм

Рассмотрим уравнение:

$$2^x = 8$$

Мы знаем, что $2^3 = 8$, поэтому $x = 3$.

А если уравнение такое:

$$2^x = 5$$

Подбором целое число не находится. Нужно какое-то новое обозначение для решения. Это обозначение и есть логарифм.

Определение

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить b.

Записывается это так:

$$\log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b$$

Читается: «логарифм b по основанию a равен c».

Ограничения

В определении логарифма есть важные ограничения:

- Основание a должно быть положительным и не равным единице: $a > 0$, $a \neq 1$.
- Число b (называемое аргументом логарифма) должно быть положительным: $b > 0$.

Почему такие ограничения? Потому что:

- Если $a = 1$, то $1^c = 1$ всегда, и нельзя получить другие числа.
- Если $a < 0$, то a^c определён не для всех c (например, $(-2)^{0.5}$ не существует).
- Если $b \leq 0$, то не существует такого c, чтобы a^c было отрицательным или нулём (при $a > 0$).

Примеры на понимание определения

По определению, $\log_2 8 = 3$, потому что $2^3 = 8$. $\log_3 9 = 2$, потому что $3^2 = 9$. $\log_5 125 = 3$, потому что $5^3 = 125$.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Нахождение логарифма по определению

Найдём $\log_2 16$.

Нужно найти такое число c, чтобы $2^c = 16$. $2^4 = 16$, значит $c = 4$.

Ответ: $\log_2 16 = 4$.

Пример 2

Логарифм с дробным результатом

Найдём $\log_4 2$.

Нужно найти c, такое что $4^c = 2$. Заметим, что $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$, значит $c = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\log_4 2 = \frac{1}{2}$.

Пример 3

Логарифм с отрицательным результатом

Найдём $\log_{1/2} 8$.

Нужно найти c, такое что $\left(\frac{1}{2}\right)^c = 8$. Заметим, что $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$, значит $c = -3$.

Ответ: $\log_{1/2} 8 = -3$.

Пример 4

Логарифм с результатом, равным нулю

Найдём $\log_5 1$.

Нужно найти c, такое что $5^c = 1$. $5^0 = 1$, значит $c = 0$.

Ответ: $\log_5 1 = 0$.

Пример 5

Обратная задача: нахождение числа по логарифму

Найдём x, если $\log_3 x = 4$.

По определению, $\log_3 x = 4$ означает, что $3^4 = x$. $3^4 = 81$, значит $x = 81$.

Пример 6

Нахождение основания

Найдём a, если $\log_a 16 = 2$.

По определению, $\log_a 16 = 2$ означает, что $a^2 = 16$. $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$ или $a = -4$. Но основание должно быть положительным и не равным 1, поэтому $a = 4$.

Ответ: $a = 4$.

Пример 7

Проверка области определения

Имеет ли смысл выражение $\log_2(-4)$?

По определению, аргумент логарифма должен быть положительным. $-4 < 0$, поэтому выражение не имеет смысла.

Ответ: не имеет смысла.

Пример 8

Ещё пример с дробным основанием

Найдём $\log_8 4$.

Нужно найти c, такое что $8^c = 4$. Заметим, что $8^{2/3} = (8^{1/3})^2 = 2^2 = 4$, значит $c = \frac{2}{3}$.

Ответ: $\log_8 4 = \frac{2}{3}$.

Задачи

1. Найдите значение логарифма:

1) $\log_2 4$ **4)** $\log_7 49$ **7)** $\log_5 125$ **10)** $\log_3 81$

2) $\log_3 9$ **5)** $\log_2 8$ **8)** $\log_7 343$ **11)** $\log_4 16$

3) $\log_5 25$ **6)** $\log_3 27$ **9)** $\log_2 16$ **12)** $\log_9 81$

2. Найдите значение логарифма:

1) $\log_4 2$

2) $\log_8 2$

3) $\log_9 3$

4) $\log_1 64$

5) $\log_2 \dfrac{1}{2}$

6) $\log_3 \dfrac{1}{3}$

7) $\log_4 \dfrac{1}{4}$

8) $\log_5 \dfrac{1}{5}$

9) $\log_2 \dfrac{1}{8}$

10) $\log_3 \dfrac{1}{9}$

11) $\log_4 \dfrac{1}{16}$

12) $\log_5 \dfrac{1}{25}$

3. Найдите значение логарифма:

1) $\log_{1/2} 2$

2) $\log_{1/3} 3$

3) $\log_{1/4} 4$

4) $\log_{1/5} 5$

5) $\log_{1/2} 4$

6) $\log_{1/3} 9$

7) $\log_{1/4} 16$

8) $\log_{1/5} 25$

9) $\log_2 0.5$

10) $\log_3 0.(3)$

11) $\log_4 0.25$

12) $\log_5 0.2$

4. Найдите x из равенства:

1) $\log_2 x = 3$

2) $\log_3 x = 2$

3) $\log_5 x = 4$

4) $\log_7 x = 1$

5) $\log_2 x = -1$

6) $\log_3 x = -2$

7) $\log_4 x = -3$

8) $\log_5 x = 0$

9) $\log_x 8 = 3$

10) $\log_x 81 = 4$

11) $\log_x 125 = 3$

12) $\log_x 16 = 2$

5. Имеет ли смысл выражение:

1) $\log_2 0$

2) $\log_3(-9)$

3) $\log_{-2} 8$

4) $\log_1 5$

5) $\log_5 0.2$

6) $\log_{0.5} 2$

7) $\log_{0.2} 0.04$

8) $\log_2(-4)$

9) $\log_3 0$

10) $\log_{-3} 9$

11) $\log_{0.1} 10$

12) $\log_4(-16)$

6. Найдите значение выражения:

1) $2^{\log_2 5}$

2) $3^{\log_3 7}$

3) $5^{\log_5 2}$

4) $10^{\log_{10} 100}$

5) $4^{\log_4 2}$

6) $9^{\log_9 3}$

7) $16^{\log_{16} 2}$

8) $25^{\log_{25} 5}$

9) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_{1/2} 8}$

10) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_{1/3} 9}$

11) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\log_{1/4} 2}$

12) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\log_{1/5} 25}$

Основное логарифмическое тождество

Теория

В этой главе мы познакомимся с основным логарифмическим тождеством, которое напрямую вытекает из определения логарифма.

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Это тождество читается так: если возвести основание a в степень, равную логарифму числа b по основанию a, то получится само число b.

Как это следует из определения: По определению, $\log_a b = c$ означает, что $a^c = b$. Если вместо c подставить $\log_a b$, то и получится $a^{\log_a b} = b$.

Важное замечание: Тождество работает только при выполнении условий существования логарифма: $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Простейшее применение

Найдём значение выражения:

$$2^{\log_2 7}$$

По основному логарифмическому тождеству, $2^{\log_2 7} = 7$.

Ответ: 7.

Пример 2

Степень с логарифмом в показателе

Найдём значение выражения:

$$5^{\log_5 10}$$

Неважно, какое число стоит под логарифмом — главное, чтобы основание степени совпадало с основанием логарифма:

$$5^{\log_5 10} = 10$$

Ответ: 10.

Пример 3

Когда основание степени и логарифма разные

Найдём значение выражения:

$$2^{\log_4 16}$$

Здесь основание степени 2 не совпадает с основанием логарифма 4. Просто так применить тождество нельзя. Но можно заметить, что $\log_4 16 = 2$, так как $4^2 = 16$. Тогда:

$$2^{\log_4 16} = 2^2 = 4$$

Ответ: 4.

Пример 4

Выражение с корнем

Найдём значение выражения:

$$9^{\log_3 5}$$

Основания разные. Заметим, что $9 = 3^2$. Тогда:

$$9^{\log_3 5} = (3^2)^{\log_3 5} = 3^{2\log_3 5}$$

Теперь воспользуемся свойством степени: $2\log_3 5 = \log_3 5^2 = \log_3 25$. Тогда:

$$3^{\log_3 25} = 25$$

Ответ: 25.

Пример 5

Обратное применение

Упростим выражение:

$$7^{\log_7 3 + \log_7 4}$$

По свойству степеней: $7^{\log_7 3+\log_7 4} = 7^{\log_7 3} \cdot 7^{\log_7 4} = 3 \cdot 4 = 12$.
Ответ: 12.

Пример 6

Ещё один пример с суммой

Найдём значение:

$$2^{\log_2 5 - \log_2 3} = \frac{2^{\log_2 5}}{2^{\log_2 3}} = \frac{5}{3}$$

Ответ: $\frac{5}{3}$.

Пример 7

Выражение с коэффициентом

Найдём значение:

$$3^{2\log_3 4} = 3^{\log_3 4^2} = 3^{\log_3 16} = 16$$

Ответ: 16.

Пример 8

Сложный случай

Найдём значение:

$$4^{\log_2 5}$$

Представим 4 как 2^2:

$$4^{\log_2 5} = (2^2)^{\log_2 5} = 2^{2\log_2 5} = 2^{\log_2 5^2} = 2^{\log_2 25} = 25$$

Ответ: 25.

Пример 9

Когда в результате получается дробь

Найдём значение:

$$8^{\log_2 3} = (2^3)^{\log_2 3} = 2^{3\log_2 3} = 2^{\log_2 3^3} = 2^{\log_2 27} = 27$$

Ответ: 27.

Пример 10

Проверка области определения

Имеет ли смысл выражение $2^{\log_2(-5)}$?
Нет, потому что $\log_2(-5)$ не существует (аргумент логарифма отрицательный).

Задачи

1. Найдите значение выражения (прямое применение тождества):

1) $2^{\log_2 3}$
2) $3^{\log_3 7}$
3) $5^{\log_5 2}$
4) $7^{\log_7 4}$
5) $10^{\log_{10} 25}$
6) $4^{\log_4 9}$
7) $6^{\log_6 5}$
8) $8^{\log_8 3}$
9) $2^{\log_2 0.5}$
10) $3^{\log_3 0.1}$
11) $4^{\log_4 0.25}$
12) $5^{\log_5 0.2}$

2. Найдите значение выражения (с суммой логарифмов):

1) $2^{\log_2 3+\log_2 5}$
2) $3^{\log_3 2+\log_3 7}$
3) $5^{\log_5 2+\log_5 3}$
4) $2^{\log_2 6-\log_2 3}$
5) $3^{\log_3 10-\log_3 2}$
6) $4^{\log_4 12-\log_4 3}$
7) $6^{\log_6 2+\log_6 3+\log_6 5}$
8) $10^{\log_{10} 2+\log_{10} 3-\log_{10} 5}$
9) $2^{2\log_2 3}$
10) $3^{3\log_3 2}$
11) $5^{2\log_5 2+\log_5 3}$
12) $7^{\log_7 2+2\log_7 3}$

3. Найдите значение выражения (с приведением основания):

1) $4^{\log_2 3}$
2) $9^{\log_3 2}$
3) $16^{\log_2 5}$
4) $25^{\log_5 2}$
5) $8^{\log_2 3}$
6) $27^{\log_3 4}$
7) $32^{\log_2 3}$
8) $81^{\log_3 2}$
9) $64^{\log_4 5}$
10) $125^{\log_5 2}$
11) $49^{\log_7 3}$
12) $100^{\log_{10} 2}$

4. Упростите выражение:

1) $a^{\log_a b}\cdot a^{\log_a c}$
2) $a^{\log_a b-\log_a c}$
3) $a^{2\log_a b}$
4) $a^{\frac{1}{2}\log_a b}$
5) $(a^{\log_a b})^{\log_b a}$
6) $a^{\log_a b\cdot\log_b c}$
7) $b^{\log_b a}\cdot a^{\log_a b}$
8) $\dfrac{a^{\log_a b}}{a^{\log_a c}}$
9) $\left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b a}$
10) $a^{\log_a b+\log_a c-\log_a d}$
11) $a^{2\log_a b-3\log_a c}$
12) $a^{\frac{1}{3}\log_a b+\frac{2}{3}\log_a c}$

5. Найдите значение выражения (комбинированные):

1) $2^{\log_2 3}+3^{\log_3 2}$
2) $4^{\log_2 3}-9^{\log_3 2}$
3) $5^{\log_5 2}\cdot 2^{\log_2 5}$
4) $8^{\log_2 3}\cdot 3^{\log_3 8}$
5) $\dfrac{2^{\log_2 5}}{5^{\log_5 2}}$
6) $\dfrac{9^{\log_3 2}}{4^{\log_2 3}}$
7) $2^{\log_4 9}+3^{\log_9 4}$
8) $4^{\log_2 5}-25^{\log_5 2}$
9) $16^{\log_2 3}\cdot 9^{\log_3 4}$
10) $27^{\log_3 4}\cdot 64^{\log_4 3}$
11) $2^{\log_4 9}\cdot 3^{\log_9 16}$
12) $5^{\log_{25} 4}\cdot 2^{\log_4 25}$

6. Имеет ли смысл выражение? Если да, найдите значение:

1) $2^{\log_2 0}$
2) $3^{\log_3(-1)}$
3) $4^{\log_2(-4)}$
4) $5^{\log_5 0.2}$
5) $6^{\log_6 \frac{1}{36}}$
6) $7^{\log_7 \sqrt{7}}$
7) $8^{\log_2 16}$
8) $9^{\log_3 27}$
9) $10^{\log_{100} 10}$
10) $0.5^{\log_{0.5} 2}$
11) $0.2^{\log_{0.2} 0.04}$
12) $1.5^{\log_{1.5} 2.25}$

Логарифм единицы и логарифм основания

Теория

В этой главе мы рассмотрим простейшие, но очень важные свойства логарифмов, которые часто используются при упрощении выражений.

Логарифм единицы:

$$\log_a 1 = 0$$

где $a > 0$, $a \neq 1$.

Это следует из определения: $a^0 = 1$ для любого допустимого a.

Логарифм основания:

$$\log_a a = 1$$

где $a > 0$, $a \neq 1$.

Это следует из определения: $a^1 = a$.

Логарифм степени основания:

$$\log_a a^k = k$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, k — любое действительное число.

Это следует из определения: $a^k = a^k$, значит показатель степени равен k.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Логарифм единицы

Найдём значение выражения:

$$\log_5 1$$

По свойству логарифма единицы: $\log_5 1 = 0$.

Ответ: 0.

Пример 2

Логарифм основания

Найдём значение выражения:

$$\log_7 7$$

По свойству логарифма основания: $\log_7 7 = 1$.

Ответ: 1.

Пример 3

Логарифм степени основания

Найдём значение выражения:

$$\log_2 8$$

Заметим, что $8 = 2^3$, поэтому $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$.

Ответ: 3.

Пример 4

Ещё пример со степенью

Найдём значение выражения:

$$\log_3 81$$

$81 = 3^4$, поэтому $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$.

Ответ: 4.

Пример 5

Отрицательная степень

Найдём значение выражения:

$$\log_2 \frac{1}{8}$$

$\frac{1}{8} = 2^{-3}$, поэтому $\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$.
Ответ: -3.

Пример 6

Дробная степень

Найдём значение выражения:

$$\log_4 2$$

$2 = 4^{1/2}$, поэтому $\log_4 2 = \log_4 4^{1/2} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример 7

Корень как степень

Найдём значение выражения:

$$\log_3 \sqrt{3}$$

$\sqrt{3} = 3^{1/2}$, поэтому $\log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{1/2} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример 8

Комбинация свойств

Найдём значение выражения:

$$\log_5 125 - \log_5 5 + \log_5 1$$

$\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$ $\log_5 5 = 1$ $\log_5 1 = 0$
Получаем: $3 - 1 + 0 = 2$.
Ответ: 2.

Пример 9

Выражение с разными основаниями

Найдём значение выражения:

$$\log_2 16 + \log_3 27 - \log_4 1$$

$\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$ $\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$ $\log_4 1 = 0$
Получаем: $4 + 3 - 0 = 7$.
Ответ: 7.

Пример 10

Упрощение выражения

Упростим выражение:

$$\log_a a^2 + \log_a a^3 - \log_a a$$

$\log_a a^2 = 2$, $\log_a a^3 = 3$, $\log_a a = 1$, поэтому $2 + 3 - 1 = 4$.
Можно заметить, что это $\log_a a^4 = 4$.

Задачи

1. Найдите значение логарифма:

1) $\log_2 1$ 4) $\log_7 1$ 7) $\log_5 5$ 10) $\log_3 9$

2) $\log_3 1$ 5) $\log_2 2$ 8) $\log_7 7$ 11) $\log_5 25$

3) $\log_5 1$ 6) $\log_3 3$ 9) $\log_2 4$ 12) $\log_7 49$

2. Найдите значение логарифма (степени основания):

1) $\log_2 8$ 4) $\log_7 343$ 7) $\log_4 64$ 10) $\log_3 243$

2) $\log_3 27$ 5) $\log_2 16$ 8) $\log_6 36$ 11) $\log_5 625$

3) $\log_5 125$ 6) $\log_3 81$ 9) $\log_2 32$ 12) $\log_7 2401$

3. Найдите значение логарифма (отрицательные степени):

1) $\log_2 \frac{1}{2}$ 4) $\log_7 \frac{1}{7}$ 7) $\log_5 \frac{1}{25}$ 10) $\log_3 \frac{1}{27}$

2) $\log_3 \frac{1}{3}$ 5) $\log_2 \frac{1}{4}$ 8) $\log_7 \frac{1}{49}$ 11) $\log_5 \frac{1}{125}$

3) $\log_5 \frac{1}{5}$ 6) $\log_3 \frac{1}{9}$ 9) $\log_2 \frac{1}{8}$ 12) $\log_7 \frac{1}{343}$

4. Найдите значение логарифма (дробные степени):

1) $\log_4 2$ 4) $\log_1 64$ 7) $\log_5 \sqrt{5}$ 10) $\log_8 4$

2) $\log_8 2$ 5) $\log_2 \sqrt{2}$ 8) $\log_7 \sqrt{7}$ 11) $\log_9 27$

3) $\log_9 3$ 6) $\log_3 \sqrt{3}$ 9) $\log_4 8$ 12) $\log_2 79$

5. Найдите значение выражения:

1) $\log_2 4 + \log_2 8$

2) $\log_3 9 - \log_3 27$

3) $\log_5 25 + \log_5 125 - \log_5 5$

4) $\log_2 16 - \log_2 4 + \log_2 1$

5) $\log_3 81 + \log_3 9 - \log_3 27$

6) $\log_4 64 - \log_4 16 + \log_4 4$

7) $\log_2 32 + \log_2 8 - \log_2 2$

8) $\log_3 243 - \log_3 27 + \log_3 9$

9) $\log_5 625 - \log_5 125 + \log_5 25$

10) $\log_2 64 - \log_2 16 + \log_2 4 - \log_2 2$

11) $\log_3 729 - \log_3 81 + \log_3 27 - \log_3 9$

12) $\log_7 343 - \log_7 49 + \log_7 7 - \log_7 1$

6. Упростите выражение:

1) $\log_a a^2 + \log_a a^3$

2) $\log_a a^5 - \log_a a^2$

3) $\log_a a^4 + \log_a a - \log_a a^2$

4) $\log_a a^3 \cdot \log_a a^2$

5) $\dfrac{\log_a a^5}{\log_a a^2}$

6) $\log_a \sqrt{a} + \log_a a^2$

7) $\log_a \frac{1}{a} + \log_a a^3$

8) $\log_a a^2 \cdot \log_a \sqrt{a} - \log_a a$

9) $\log_a a^x + \log_a a^y$

10) $\log_a a^{x+y} - \log_a a^x$

11) $\log_a a^{2x} \cdot \log_a a^{3x}$

12) $\dfrac{\log_a a^{5x}}{\log_a a^{2x}}$

Десятичные и натуральные логарифмы

Теория

В этой главе мы познакомимся с двумя особыми видами логарифмов, которые чаще всего встречаются на практике — десятичными и натуральными.

Десятичный логарифм

Десятичным логарифмом называется логарифм по основанию 10. Для него используется специальное обозначение:

$$\lg x = \log_{10} x$$

Десятичные логарифмы широко применялись до появления калькуляторов для упрощения вычислений, так как они позволяют заменять умножение сложением. Сейчас они часто встречаются в физике, химии и других науках.

Натуральный логарифм

Натуральным логарифмом называется логарифм по основанию e, где e — особое иррациональное число, приблизительно равное $2.71828\ldots$. Для натурального логарифма используется обозначение:

$$\ln x = \log_e x$$

Число e играет важную роль в математическом анализе, дифференциальных уравнениях, теории вероятностей и многих других разделах математики.

Связь между различными логарифмами

Любой логарифм можно выразить через десятичные или натуральные с помощью формулы перехода к новому основанию:

$$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a} = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Вычисление десятичного логарифма

Найдём значение выражения:

$$\lg 100$$

$100 = 10^2$, поэтому $\lg 100 = \log_{10} 10^2 = 2$.

Ответ: 2.

Пример 2

Десятичный логарифм степени десяти

Найдём значение выражения:

$$\lg 0.001$$

$0.001 = 10^{-3}$, поэтому $\lg 0.001 = -3$.

Ответ: -3.

Пример 3

Десятичный логарифм произведения

Найдём значение выражения:

$$\lg 1000 + \lg 0.01$$

$\lg 1000 = 3$, $\lg 0.01 = -2$, сумма $3 + (-2) = 1$.

Ответ: 1.

Пример 4

Натуральный логарифм

Найдём значение выражения:

$$\ln e$$

По определению, $\ln e = \log_e e = 1$.
Ответ: 1.

Пример 5

Натуральный логарифм степени e

Найдём значение выражения:

$$\ln e^5$$

$\ln e^5 = 5 \ln e = 5 \cdot 1 = 5$.
Ответ: 5.

Пример 6

Натуральный логарифм корня

Найдём значение выражения:

$$\ln \sqrt{e}$$

$\sqrt{e} = e^{1/2}$, поэтому $\ln e^{1/2} = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2}$.
Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример 7

Переход от десятичного к натуральному

Выразим $\lg 5$ через натуральные логарифмы.
По формуле перехода:

$$\lg 5 = \frac{\ln 5}{\ln 10}$$

Пример 8

Вычисление с помощью калькулятора

С помощью калькулятора найдём приближённое значение $\lg 2$ и $\ln 2$.
$\lg 2 \approx 0.3010$, $\ln 2 \approx 0.6931$.
Заметим, что $\frac{\ln 2}{\ln 10} \approx \frac{0.6931}{2.3026} \approx 0.3010$, что подтверждает формулу перехода.

Пример 9

Упрощение выражения с разными логарифмами

Упростим выражение:

$$\lg 100 + \ln e^2 - \ln 1$$

$\lg 100 = 2$, $\ln e^2 = 2$, $\ln 1 = 0$, получаем $2 + 2 - 0 = 4$.
Ответ: 4.

Пример 10

Выражение с числом e в степени

Найдём значение выражения:

$$e^{\ln 5}$$

По основному логарифмическому тождеству, $e^{\ln 5} = 5$.
Ответ: 5.

Задачи

1. Найдите значение десятичного логарифма:

1) $\lg 10$
2) $\lg 100$
3) $\lg 1000$
4) $\lg 10000$
5) $\lg 0.1$
6) $\lg 0.01$
7) $\lg 0.001$
8) $\lg 0.0001$
9) $\lg 1$
10) $\lg 10^5$
11) $\lg 10^{-2}$
12) $\lg 10^{0.5}$

2. Найдите значение натурального логарифма:

1) $\ln e$
2) $\ln e^2$
3) $\ln e^3$
4) $\ln e^4$
5) $\ln e^{-1}$
6) $\ln e^{-2}$
7) $\ln e^{-3}$
8) $\ln \sqrt{e}$
9) $\ln \sqrt[3]{e}$
10) $\ln \dfrac{1}{e}$
11) $\ln \dfrac{1}{e^2}$
12) $\ln e^{0.5}$

3. Найдите значение выражения:

1) $\lg 1000 + \lg 0.1$
2) $\lg 100 - \lg 0.01$
3) $\lg 10^5 \cdot \lg 10^{-2}$
4) $\dfrac{\lg 10000}{\lg 100}$
5) $\ln e^3 + \ln e^2$
6) $\ln e^4 - \ln e$
7) $\ln e^2 \cdot \ln e^3$
8) $\dfrac{\ln e^5}{\ln e^2}$
9) $\lg 1000 + \ln e^2 - \ln 1$
10) $\lg 0.01 + \ln e^{-3} + \lg 10$
11) $2\lg 100 + 3\ln e - 4\lg 1$
12) $\dfrac{\lg 1000}{\lg 10} + \dfrac{\ln e^4}{\ln e}$

4. Выразите через натуральные логарифмы:

1) $\lg 2$
2) $\lg 3$
3) $\lg 5$
4) $\lg 7$
5) $\log_2 10$
6) $\log_3 10$
7) $\log_5 10$
8) $\log_7 10$
9) $\log_2 e$
10) $\log_3 e$
11) $\log_5 e$
12) $\log_7 e$

5. Выразите через десятичные логарифмы:

1) $\ln 2$
2) $\ln 3$
3) $\ln 5$
4) $\ln 7$
5) $\log_2 e$
6) $\log_3 e$
7) $\log_5 e$
8) $\log_7 e$
9) $\log_2 3$
10) $\log_3 5$
11) $\log_5 7$
12) $\log_7 2$

6. Найдите значение выражения (используя основное логарифмическое тождество):

1) $10^{\lg 2}$
2) $10^{\lg 5}$
3) $e^{\ln 3}$
4) $e^{\ln 7}$
5) $10^{\lg 100}$
6) $e^{\ln e^2}$
7) $10^{\lg 0.1}$
8) $e^{\ln e^{-3}}$
9) $10^{2\lg 3}$
10) $e^{3\ln 2}$
11) $10^{\lg 2+\lg 5}$
12) $e^{\ln 3+\ln 4}$

Логарифм произведения

Теория

В этой главе мы рассмотрим одно из важнейших свойств логарифмов — логарифм произведения. Это свойство позволяет превращать умножение чисел в сложение логарифмов.

Свойство:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$.

Доказательство: Пусть $\log_a b = x$ и $\log_a c = y$. Тогда $a^x = b$ и $a^y = c$. Перемножая эти равенства, получаем $a^x \cdot a^y = a^{x+y} = bc$. Значит, $\log_a(bc) = x + y = \log_a b + \log_a c$.

Важное замечание: Свойство работает только для положительных чисел под логарифмами. Также основание логарифмов должно быть одинаковым.

Обобщение: Для произведения нескольких множителей:

$$\log_a(b_1 b_2 \cdots b_n) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \cdots + \log_a b_n$$

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Прямое применение

Найдём значение выражения:

$$\log_2(4 \cdot 8)$$

По свойству логарифма произведения:

$$\log_2(4 \cdot 8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$$

Можно проверить: $4 \cdot 8 = 32$, $\log_2 32 = 5$. Всё верно.

Пример 2

Вычисление с помощью свойства

Найдём значение выражения:

$$\log_3 6 + \log_3 1.5$$

Сумма логарифмов равна логарифму произведения:

$$\log_3 6 + \log_3 1.5 = \log_3(6 \cdot 1.5) = \log_3 9 = 2$$

Ответ: 2.

Пример 3

Упрощение выражения

Упростим выражение:

$$\lg 2 + \lg 5$$

$$\lg 2 + \lg 5 = \lg(2 \cdot 5) = \lg 10 = 1$$

Ответ: 1.

Пример 4

Три множителя

Найдём значение выражения:

$$\log_2 3 + \log_2 4 + \log_2 5$$

$$\log_2 3 + \log_2 4 + \log_2 5 = \log_2(3 \cdot 4 \cdot 5) = \log_2 60$$

Ответ: $\log_2 60$.

Пример 5

Обратное применение

Представим $\log_5 10$ в виде суммы двух логарифмов.
Число 10 можно разложить на множители, например $2 \cdot 5$:

$$\log_5 10 = \log_5(2 \cdot 5) = \log_5 2 + \log_5 5 = \log_5 2 + 1$$

Пример 6

Степень как произведение

Найдём значение выражения:

$$\log_2 4 + \log_2 8 + \log_2 16$$

$$\log_2 4 + \log_2 8 + \log_2 16 = \log_2(4 \cdot 8 \cdot 16) = \log_2 512 = 9$$

(Проверим: $4 \cdot 8 \cdot 16 = 512$, $2^9 = 512$.)

Пример 7

Упрощение с десятичными логарифмами

Найдём значение выражения:

$$\lg 2 + \lg 3 + \lg 5$$

$$\lg 2 + \lg 3 + \lg 5 = \lg(2 \cdot 3 \cdot 5) = \lg 30$$

Ответ: $\lg 30$.

Пример 8

Сложный случай с корнями

Упростим выражение:

$$\log_2 \sqrt{2} + \log_2 \sqrt{8}$$

$\log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{1/2} = \dfrac{1}{2}\log_2 \sqrt{8} = \log_2(8^{1/2}) = \dfrac{1}{2}\log_2 8 = \dfrac{1}{2} \cdot 3 = \dfrac{3}{2}$
Сумма: $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2} = 2$.
Можно иначе: $\log_2 \sqrt{2} + \log_2 \sqrt{8} = \log_2(\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}) = \log_2 \sqrt{16} = \log_2 4 = 2$.

Задачи

1. Представьте в виде суммы логарифмов:

1) $\log_2(3 \cdot 5)$

2) $\log_3(4 \cdot 7)$

3) $\log_5(2 \cdot 9)$

4) $\log_7(8 \cdot 11)$

5) $\log_2(2 \cdot 3 \cdot 5)$

6) $\log_3(4 \cdot 5 \cdot 6)$

7) $\log_4(5 \cdot 7 \cdot 9)$

8) $\lg(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)$

9) $\ln(2 \cdot e \cdot 5)$

10) $\log_2(2a \cdot 3b)$

11) $\log_3(5xy)$

12) $\log_5(10abc)$

2. Представьте в виде логарифма произведения:

1) $\log_2 3 + \log_2 5$
2) $\log_3 4 + \log_3 7$
3) $\log_5 2 + \log_5 9$
4) $\lg 3 + \lg 7$
5) $\ln 2 + \ln 5$
6) $\log_2 3 + \log_2 4 + \log_2 5$
7) $\log_3 2 + \log_3 3 + \log_3 5$
8) $\lg 2 + \lg 3 + \lg 7$
9) $\ln 3 + \ln 5 + \ln 7$
10) $\log_2 a + \log_2 b$
11) $\log_3 x + \log_3 y$
12) $\log_5 m + \log_5 n$

3. Найдите значение выражения:

1) $\log_2 4 + \log_2 8$
2) $\log_3 9 + \log_3 27$
3) $\log_5 25 + \log_5 125$
4) $\lg 2 + \lg 5$
5) $\lg 4 + \lg 25$
6) $\lg 8 + \lg 125$
7) $\ln 2 + \ln 5$
8) $\ln 4 + \ln 25$
9) $\ln 8 + \ln 125$
10) $\log_2 3 + \log_2 5 + \log_2 7$
11) $\log_3 2 + \log_3 5 + \log_3 7$
12) $\log_5 2 + \log_5 3 + \log_5 7$

4. Упростите выражение:

1) $\log_a 2 + \log_a 5$
2) $\log_a 3 + \log_a 7$
3) $\log_a b + \log_a c$
4) $\log_a x + \log_a y$
5) $\log_a 2 + \log_a 3 + \log_a 5$
6) $\log_a 4 + \log_a 25$
7) $\log_a 8 + \log_a 125$
8) $\log_a b + \log_a c + \log_a d$
9) $\log_a x + \log_a y + \log_a z$
10) $\log_a 2 + \log_a 3 + \log_a 5 + \log_a 7$
11) $\log_a b^2 + \log_a c^3$
12) $\log_a \sqrt{b} + \log_a \sqrt{c}$

5. Решите уравнение (используя свойство логарифма произведения):

1) $\log_2 x + \log_2 3 = \log_2 15$
2) $\log_3 x + \log_3 4 = \log_3 20$
3) $\log_5 2 + \log_5 x = \log_5 18$
4) $\lg x + \lg 2 = \lg 10$
5) $\ln x + \ln 3 = \ln 21$
6) $\log_2 x + \log_2(x+1) = \log_2 6$
7) $\log_3 x + \log_3(x-2) = \log_3 8$
8) $\log_5(x+1) + \log_5(x-1) = \log_5 8$
9) $\lg x + \lg(x-3) = \lg 4$
10) $\ln(x+2) + \ln(x-1) = \ln 10$
11) $\log_2(x-1) + \log_2(x+2) = \log_2 10$
12) $\log_3(2x-1) + \log_3(x+2) = \log_3 12$

6. Докажите тождество:

1) $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$
2) $\log_a(bcd) = \log_a b + \log_a c + \log_a d$
3) $\log_a(b^2c^3) = 2\log_a b + 3\log_a c$
4) $\log_a(\sqrt{b}\sqrt[3]{c}) = \frac{1}{2}\log_a b + \frac{1}{3}\log_a c$
5) $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) + \log_a c = \log_a b$
6) $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$ (обратное)

Логарифм частного

Теория

В этой главе мы рассмотрим следующее важное свойство логарифмов — логарифм частного. Оно позволяет превращать деление чисел в вычитание логарифмов.

Свойство:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$.

Доказательство: Пусть $\log_a b = x$ и $\log_a c = y$. Тогда $a^x = b$ и $a^y = c$. Деля эти равенства, получаем $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} = \frac{b}{c}$. Значит, $\log_a \frac{b}{c} = x - y = \log_a b - \log_a c$.

Важное замечание: Свойство работает только для положительных чисел под логарифмами. Основание логарифмов должно быть одинаковым.

Связь с логарифмом произведения: Логарифм частного можно рассматривать как частный случай логарифма произведения, если учесть, что $\frac{b}{c} = b \cdot c^{-1}$, и применить свойство степени (которое мы рассмотрим позже):

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b + \log_a c^{-1} = \log_a b - \log_a c$$

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Прямое применение

Найдём значение выражения:

$$\log_2 \frac{16}{4}$$

По свойству логарифма частного:

$$\log_2 \frac{16}{4} = \log_2 16 - \log_2 4 = 4 - 2 = 2$$

Можно проверить: $\frac{16}{4} = 4$, $\log_2 4 = 2$. Всё верно.

Пример 2

Вычисление с помощью свойства

Найдём значение выражения:

$$\log_3 27 - \log_3 9$$

Разность логарифмов равна логарифму частного:

$$\log_3 27 - \log_3 9 = \log_3 \frac{27}{9} = \log_3 3 = 1$$

Ответ: 1.

Пример 3

Упрощение выражения

Упростим выражение:

$$\lg 100 - \lg 4$$

$$\lg 100 - \lg 4 = \lg \frac{100}{4} = \lg 25 = \lg 5^2 = 2 \lg 5$$

Ответ: $2 \lg 5$.

Пример 4

Обратное применение

Представим $\log_2 5$ в виде разности двух логарифмов.
Число 5 можно представить как $\dfrac{10}{2}$:

$$\log_2 5 = \log_2 \frac{10}{2} = \log_2 10 - \log_2 2 = \log_2 10 - 1$$

Пример 5

Комбинация с произведением

Найдём значение выражения:

$$\log_2 12 + \log_2 3 - \log_2 4$$

Сначала сумму двух первых превратим в логарифм произведения:

$$\log_2 12 + \log_2 3 = \log_2(12 \cdot 3) = \log_2 36$$

Теперь вычитаем $\log_2 4$:

$$\log_2 36 - \log_2 4 = \log_2 \frac{36}{4} = \log_2 9 = \log_2 3^2 = 2\log_2 3$$

Пример 6

Несколько действий

Найдём значение выражения:

$$\log_2 80 - \log_2 5 - \log_2 2$$

$$\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2 \frac{80}{5} = \log_2 16$$

$$\log_2 16 - \log_2 2 = \log_2 \frac{16}{2} = \log_2 8 = 3$$

Можно сразу: $\log_2 80 - \log_2 5 - \log_2 2 = \log_2 \dfrac{80}{5 \cdot 2} = \log_2 8 = 3$.

Пример 7

Упрощение с десятичными логарифмами

Найдём значение выражения:

$$\lg 50 - \lg 5$$

$$\lg 50 - \lg 5 = \lg \frac{50}{5} = \lg 10 = 1$$

Ответ: 1.

Пример 8

Сложный случай с корнями

Упростим выражение:

$$\log_2 \sqrt{8} - \log_2 \sqrt{2}$$

$$\log_2 \sqrt{8} - \log_2 \sqrt{2} = \log_2 \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \log_2 \sqrt{\frac{8}{2}} = \log_2 \sqrt{4} = \log_2 2 = 1$$

Пример 9

Выражение с переменными

Упростим выражение:

$$\log_a \frac{x^2 y}{z^3}$$

Применяем свойство логарифма частного, а затем произведения:

$$\log_a \frac{x^2 y}{z^3} = \log_a(x^2 y) - \log_a z^3 = \log_a x^2 + \log_a y - \log_a z^3$$

Далее применим свойство степени (будет в следующей главе):

$$= 2\log_a x + \log_a y - 3\log_a z$$

Задачи

1. Представьте в виде разности логарифмов:

1) $\log_2 \frac{5}{3}$ **4)** $\log_7 \frac{11}{8}$ **7)** $\log_2 \frac{2x}{y}$

2) $\log_3 \frac{7}{4}$ **5)** $\lg \frac{3}{2}$ **8)** $\log_3 \frac{a}{b}$

3) $\log_5 \frac{9}{2}$ **6)** $\ln \frac{5}{3}$ **9)** $\log_5 \frac{m}{n}$

2. Представьте в виде логарифма частного:

1) $\log_2 7 - \log_2 3$ **4)** $\lg 10 - \lg 3$ **7)** $\log_3 x - \log_3 y$

2) $\log_3 8 - \log_3 5$ **5)** $\ln 15 - \ln 7$ **8)** $\log_5 m - \log_5 n$

3) $\log_5 9 - \log_5 4$ **6)** $\log_2 a - \log_2 b$ **9)** $\lg p - \lg q$

3. Найдите значение выражения:

1) $\log_2 16 - \log_2 4$ **5)** $\ln e^3 - \ln e$ **9)** $\lg 1000 - \lg 100$

2) $\log_3 27 - \log_3 9$ **6)** $\log_2 32 - \log_2 8$ **10)** $\ln e^5 - \ln e^2$

3) $\log_5 125 - \log_5 25$ **7)** $\log_3 81 - \log_3 27$ **11)** $\log_2 48 - \log_2 3$

4) $\lg 100 - \lg 10$ **8)** $\log_4 64 - \log_4 16$ **12)** $\log_3 54 - \log_3 2$

4. Упростите выражение:

1) $\log_2 10 - \log_2 5$ **5)** $\ln 14 - \ln 7$ **9)** $\lg 42 - \lg 7$

2) $\log_3 15 - \log_3 5$ **6)** $\log_2 18 - \log_2 9$ **10)** $\ln 21 - \ln 3$

3) $\log_5 20 - \log_5 4$ **7)** $\log_3 24 - \log_3 8$ **11)** $\log_2 50 - \log_2 25$

4) $\lg 30 - \lg 3$ **8)** $\log_5 35 - \log_5 7$ **12)** $\log_3 75 - \log_3 25$

5. Найдите значение выражения (комбинации):

1) $\log_2 12 + \log_2 3 - \log_2 4$ **5)** $\ln 14 + \ln 3 - \ln 7$ **9)** $\lg 84 - \lg 7 + \lg 5$

2) $\log_3 18 + \log_3 2 - \log_3 4$ **6)** $\log_2 45 - \log_2 5 + \log_2 4$ **10)** $\ln 90 - \ln 6 + \ln 2$

3) $\log_5 30 + \log_5 2 - \log_5 6$ **7)** $\log_3 56 - \log_3 7 + \log_3 3$ **11)** $\log_2 150 - \log_2 3 - \log_2 25$

4) $\lg 20 + \lg 5 - \lg 2$ **8)** $\log_5 48 - \log_5 6 + \log_5 5$ **12)** $\log_3 126 - \log_3 2 - \log_3 7$

6. Решите уравнение (используя свойство логарифма частного):

1) $\log_2 x - \log_2 3 = \log_2 5$

2) $\log_3 x - \log_3 4 = \log_3 2$

3) $\log_5 x - \log_5 2 = \log_5 7$

4) $\lg x - \lg 2 = \lg 3$

5) $\ln x - \ln 5 = \ln 2$

6) $\log_2(x-1) - \log_2 3 = \log_2 2$

7) $\log_3(x+1) - \log_3 4 = \log_3 3$

8) $\log_5(2x-1) - \log_5 3 = \log_5 4$

9) $\lg(x+3) - \lg 2 = \lg 5$

10) $\ln(x-2) - \ln 3 = \ln 4$

11) $\log_2(3x-1) - \log_2(x+1) = \log_2 2$

12) $\log_3(5x+2) - \log_3(x-1) = \log_3 4$

7. Докажите тождество:

1) $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

2) $\log_a \frac{bc}{d} = \log_a b + \log_a c - \log_a d$

3) $\log_a \frac{b^2}{c^3} = 2\log_a b - 3\log_a c$

4) $\log_a \frac{\sqrt{b}}{\sqrt[3]{c}} = \frac{1}{2}\log_a b - \frac{1}{3}\log_a c$

5) $\log_a \frac{b}{c} + \log_a c = \log_a b$

6) $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$ (обратное)

Логарифм степени

Теория

В этой главе мы рассмотрим ещё одно важное свойство логарифмов — логарифм степени. Это свойство позволяет выносить показатель степени за знак логарифма.

Свойство:

$$\log_a b^k = k \log_a b$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, k — любое действительное число.

Доказательство: Пусть $\log_a b = x$. Тогда $a^x = b$. Возведём обе части в степень k: $(a^x)^k = a^{xk} = b^k$. Значит, $\log_a b^k = xk = k \log_a b$.

Частный случай — логарифм корня: Поскольку $\sqrt[n]{b} = b^{1/n}$, то

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$$

Важное замечание: Свойство работает для любого действительного показателя степени k, в том числе для дробных и отрицательных.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Прямое применение

Найдём значение выражения:

$$\log_2 8^3$$

По свойству логарифма степени:

$$\log_2 8^3 = 3 \log_2 8 = 3 \cdot 3 = 9$$

Можно проверить: $8^3 = 512$, $\log_2 512 = 9$. Всё верно.

Пример 2

Обратное применение

Представим $3 \log_2 5$ в виде логарифма степени:

$$3 \log_2 5 = \log_2 5^3 = \log_2 125$$

Пример 3

Логарифм корня

Найдём значение выражения:

$$\log_3 \sqrt{9}$$

Так как $\sqrt{9} = 9^{1/2}$, то

$$\log_3 \sqrt{9} = \frac{1}{2} \log_3 9 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

Можно проверить: $\sqrt{9} = 3$, $\log_3 3 = 1$.

Пример 4

Отрицательная степень

Найдём значение выражения:

$$\log_2 \frac{1}{8}$$

$\frac{1}{8} = 8^{-1} = 2^{-3}$, поэтому

$$\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3\log_2 2 = -3 \cdot 1 = -3$$

Пример 5

Дробная степень

Найдём значение выражения:

$$\log_4 8$$

Представим 4 и 8 как степени двойки: $4 = 2^2$, $8 = 2^3$. Тогда

$$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2}$$

Но можно и через степень: $8 = 4^{3/2}$, так как $4^{1/2} = 2$, $4^{3/2} = (4^{1/2})^3 = 2^3 = 8$. Тогда

$$\log_4 8 = \log_4 4^{3/2} = \frac{3}{2}\log_4 4 = \frac{3}{2}$$

Пример 6

Комбинация свойств

Упростим выражение:

$$\log_2(4^3 \cdot 8^2)$$

Сначала логарифм произведения:

$$\log_2(4^3 \cdot 8^2) = \log_2 4^3 + \log_2 8^2$$

Теперь логарифм степени:

$$= 3\log_2 4 + 2\log_2 8 = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 6 + 6 = 12$$

Пример 7

Выражение с корнем

Упростим выражение:

$$\log_2 \sqrt[3]{16}$$

$$\log_2 \sqrt[3]{16} = \frac{1}{3}\log_2 16 = \frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{4}{3}$$

Пример 8

Сложный случай

Найдём значение выражения:

$$\log_2 \frac{8^2 \cdot \sqrt{4}}{16^3}$$

Преобразуем числитель и знаменатель: $8^2 = (2^3)^2 = 2^6$ $\sqrt{4} = 2$ $16^3 = (2^4)^3 = 2^{12}$

Тогда выражение под логарифмом: $\frac{2^6 \cdot 2}{2^{12}} = \frac{2^7}{2^{12}} = 2^{-5}$

Значит, $\log_2 2^{-5} = -5$.

Пример 9

Выражение с переменными

Упростим выражение:

$$\log_a \frac{x^3\sqrt{y}}{z^2}$$

$$\log_a \frac{x^3\sqrt{y}}{z^2} = \log_a(x^3\sqrt{y}) - \log_a z^2 = \log_a x^3 + \log_a \sqrt{y} - \log_a z^2$$
$$= 3\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y - 2\log_a z$$

Задачи

1. Найдите значение выражения:

1) $\log_2 4^3$
2) $\log_3 9^2$
3) $\log_5 25^4$
4) $\log_7 49^3$
5) $\log_2 8^5$
6) $\log_3 27^4$
7) $\log_4 16^3$
8) $\log_6 36^2$
9) $\log_2 2^{10}$
10) $\log_3 3^7$
11) $\log_5 5^8$
12) $\log_7 7^5$

2. Представьте в виде логарифма степени:

1) $2\log_2 3$
2) $3\log_3 5$
3) $4\log_5 2$
4) $5\log_7 3$
5) $\frac{1}{2}\log_2 7$
6) $\frac{1}{3}\log_3 10$
7) $-\log_2 5$
8) $-2\log_3 4$
9) $-\frac{1}{2}\log_5 6$
10) $2\log_a b$
11) $3\log_a x$
12) $\frac{1}{2}\log_a y$

3. Найдите значение выражения:

1) $\log_2 \sqrt{2}$
2) $\log_3 \sqrt{3}$
3) $\log_5 \sqrt{5}$
4) $\log_7 \sqrt{7}$
5) $\log_2 \sqrt[3]{2}$
6) $\log_3 \sqrt[3]{3}$
7) $\log_5 \sqrt[4]{5}$
8) $\log_7 \sqrt[5]{7}$
9) $\log_2 \frac{1}{2}$
10) $\log_3 \frac{1}{3}$
11) $\log_5 \frac{1}{25}$
12) $\log_7 \frac{1}{49}$

4. Найдите значение выражения:

1) $\log_2 8^2 + \log_2 4^3$
2) $\log_3 9^3 + \log_3 27^2$
3) $\log_5 25^4 - \log_5 125^2$
4) $\log_4 16^3 - \log_4 64^2$
5) $\log_2 \frac{8^3}{4^2}$
6) $\log_3 \frac{27^4}{9^5}$
7) $\log_2 \sqrt{8} + \log_2 \sqrt{32}$
8) $\log_3 \sqrt{27} - \log_3 \sqrt{9}$
9) $\log_5 \sqrt[3]{25} \cdot \log_5 \sqrt[3]{125}$
10) $\frac{\log_2 16^3}{\log_2 8^2}$
11) $\frac{\log_3 27^4}{\log_3 81^2}$
12) $\frac{\log_5 125^3}{\log_5 25^4}$

5. Упростите выражение:

1) $\log_a x^3$
2) $\log_a y^5$
3) $\log_a \sqrt{x}$
4) $\log_a \sqrt[3]{y}$
5) $\log_a \frac{1}{x}$
6) $\log_a \frac{1}{x^2}$
7) $\log_a(x^2y^3)$
8) $\log_a \frac{x^4}{y^2}$
9) $\log_a \frac{\sqrt{x}}{y^3}$
10) $\log_a \frac{x^2\sqrt{y}}{z^3}$
11) $\log_a \sqrt{\frac{x^3}{y^2}}$
12) $\log_a \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{y}}$

6. Найдите значение выражения:

1) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 2$

2) $(\log_2 3 + \log_2 5) \cdot \log_3 4$

3) $\dfrac{\log_2 9}{\log_2 3}$

4) $\dfrac{\log_3 27}{\log_3 9}$

5) $\log_4 9 \cdot \log_3 2$

6) $\log_9 8 \cdot \log_2 3$

7) $(\log_2 3)^2 + (\log_2 5)^2 - (\log_2 15)^2$

8) $\log_2 6 \cdot \log_3 6 - (\log_2 3 + \log_3 2)$

9) $\log_4 9 \cdot \log_9 16 \cdot \log_{16} 25$

10) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$

11) $2^{\log_2 3 + \log_2 5}$

12) $3^{2\log_3 4 - \log_3 2}$

7. Докажите тождество:

1) $\log_a b^k = k \log_a b$

2) $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n} \log_a b$

3) $\log_a \dfrac{1}{b} = -\log_a b$

4) $\log_a b^n \cdot \log_b a = n$

5) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$

6) $\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n} \log_a b$

Логарифм корня

Теория

В этой главе мы рассмотрим логарифм корня. Хотя это частный случай логарифма степени (поскольку корень — это степень с дробным показателем), ему часто уделяют отдельное внимание из-за частого использования.

Свойство:

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, n — натуральное число, $n \geq 2$.

Доказательство: Поскольку $\sqrt[n]{b} = b^{1/n}$, то

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{1/n} = \frac{1}{n} \log_a b$$

Частные случаи:

- Для квадратного корня: $\log_a \sqrt{b} = \dfrac{1}{2} \log_a b$
- Для кубического корня: $\log_a \sqrt[3]{b} = \dfrac{1}{3} \log_a b$
- Для корня n-й степени: $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n} \log_a b$

Важное замечание: Свойство работает для любого натурального n. При нечётных n подкоренное выражение может быть отрицательным, но в рамках школьной программы мы рассматриваем только положительные числа.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Квадратный корень

Найдём значение выражения:

$$\log_2 \sqrt{8}$$

$$\log_2 \sqrt{8} = \frac{1}{2} \log_2 8 = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

Можно проверить: $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\log_2(2\sqrt{2}) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Пример 2

Кубический корень

Найдём значение выражения:

$$\log_3 \sqrt[3]{27}$$

$$\log_3 \sqrt[3]{27} = \frac{1}{3} \log_3 27 = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

Можно проверить: $\sqrt[3]{27} = 3$, $\log_3 3 = 1$.

Пример 3

Корень четвёртой степени

Найдём значение выражения:

$$\log_5 \sqrt[4]{625}$$

$$\log_5 \sqrt[4]{625} = \frac{1}{4} \log_5 625 = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$$

Пример 4

Корень из степени

Найдём значение выражения:

$$\log_2 \sqrt{2^5}$$

Можно двумя способами: 1) $\log_2 \sqrt{2^5} = \log_2(2^{5/2}) = \frac{5}{2}$ 2) $\log_2 \sqrt{2^5} = \frac{1}{2}\log_2 2^5 = \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2}$

Пример 5

Корень из произведения

Найдём значение выражения:

$$\log_2 \sqrt{8 \cdot 4}$$

$$\log_2 \sqrt{8 \cdot 4} = \frac{1}{2}\log_2(8 \cdot 4) = \frac{1}{2}(\log_2 8 + \log_2 4) = \frac{1}{2}(3+2) = \frac{5}{2}$$

Пример 6

Корень из частного

Найдём значение выражения:

$$\log_3 \sqrt{\frac{27}{9}}$$

$$\log_3 \sqrt{\frac{27}{9}} = \frac{1}{2}\log_3 \frac{27}{9} = \frac{1}{2}(\log_3 27 - \log_3 9) = \frac{1}{2}(3-2) = \frac{1}{2}$$

Пример 7

Сложный корень

Найдём значение выражения:

$$\log_2 \sqrt[3]{16 \cdot \sqrt{8}}$$

Сначала упростим выражение под корнем: $16 = 2^4$, $\sqrt{8} = 2^{3/2}$, значит $16 \cdot \sqrt{8} = 2^4 \cdot 2^{3/2} = 2^{4+3/2} = 2^{11/2}$
Теперь корень кубический: $\sqrt[3]{2^{11/2}} = 2^{11/6}$
Значит, $\log_2 2^{11/6} = \dfrac{11}{6}$.

Пример 8

Выражение с переменными

Упростим выражение:

$$\log_a \sqrt[3]{\frac{x^2\sqrt{y}}{z}}$$

$$\log_a \sqrt[3]{\frac{x^2\sqrt{y}}{z}} = \frac{1}{3}\log_a \frac{x^2\sqrt{y}}{z} = \frac{1}{3}\left(\log_a x^2 + \log_a \sqrt{y} - \log_a z\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(2\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y - \log_a z\right) = \frac{2}{3}\log_a x + \frac{1}{6}\log_a y - \frac{1}{3}\log_a z$$

Задачи

1. Найдите значение выражения:

1) $\log_2 \sqrt{2}$
2) $\log_3 \sqrt{3}$
3) $\log_5 \sqrt{5}$
4) $\log_7 \sqrt{7}$
5) $\log_2 \sqrt{4}$
6) $\log_3 \sqrt{9}$
7) $\log_5 \sqrt{25}$
8) $\log_7 \sqrt{49}$
9) $\log_2 \sqrt{8}$
10) $\log_3 \sqrt{27}$
11) $\log_5 \sqrt{125}$
12) $\log_7 \sqrt{343}$

2. Найдите значение выражения:

1) $\log_2 \sqrt[3]{2}$
2) $\log_3 \sqrt[3]{3}$
3) $\log_5 \sqrt[3]{5}$
4) $\log_7 \sqrt[3]{7}$
5) $\log_2 \sqrt[3]{4}$
6) $\log_3 \sqrt[3]{9}$
7) $\log_5 \sqrt[3]{25}$
8) $\log_7 \sqrt[3]{49}$
9) $\log_2 \sqrt[3]{8}$
10) $\log_3 \sqrt[3]{27}$
11) $\log_5 \sqrt[3]{125}$
12) $\log_7 \sqrt[3]{343}$

3. Найдите значение выражения:

1) $\log_2 \sqrt[4]{2}$
2) $\log_3 \sqrt[4]{3}$
3) $\log_5 \sqrt[4]{5}$
4) $\log_7 \sqrt[4]{7}$
5) $\log_2 \sqrt[4]{16}$
6) $\log_3 \sqrt[4]{81}$
7) $\log_5 \sqrt[4]{625}$
8) $\log_7 \sqrt[4]{2401}$
9) $\log_2 \sqrt[5]{32}$
10) $\log_3 \sqrt[5]{243}$
11) $\log_5 \sqrt[5]{3125}$
12) $\log_7 \sqrt[5]{16807}$

4. Найдите значение выражения:

1) $\log_2 \sqrt{8} + \log_2 \sqrt{2}$
2) $\log_3 \sqrt{27} - \log_3 \sqrt{3}$
3) $\log_5 \sqrt{125} \cdot \log_5 \sqrt{5}$
4) $\dfrac{\log_2 \sqrt{16}}{\log_2 \sqrt{4}}$
5) $\log_2 \sqrt{8} \cdot \log_2 \sqrt{32}$
6) $\log_3 \sqrt{9} \cdot \log_3 \sqrt{81}$
7) $\log_2 \sqrt[3]{8} + \log_2 \sqrt[3]{64}$
8) $\log_3 \sqrt[3]{27} - \log_3 \sqrt[3]{9}$
9) $\log_5 \sqrt[3]{125} \cdot \log_5 \sqrt[3]{25}$
10) $\log_2 \sqrt{2} + \log_2 \sqrt[3]{2} + \log_2 \sqrt[4]{2}$
11) $\log_3 \sqrt{3} \cdot \log_3 \sqrt[3]{3} \cdot \log_3 \sqrt[4]{3}$
12) $\dfrac{\log_2 \sqrt{8} \cdot \log_2 \sqrt[3]{4}}{\log_2 \sqrt{2}}$

5. Упростите выражение:

1) $\log_a \sqrt{x}$
2) $\log_a \sqrt[3]{x^2}$
3) $\log_a \sqrt[4]{x^3}$
4) $\log_a \sqrt{xy}$
5) $\log_a \sqrt{\dfrac{x}{y}}$
6) $\log_a \sqrt[3]{x^2 y}$
7) $\log_a \sqrt{\dfrac{x^3}{y}}$
8) $\log_a \sqrt[4]{\dfrac{x^2}{y^3}}$
9) $\log_a \sqrt{x\sqrt{y}}$
10) $\log_a \sqrt[3]{x\sqrt[4]{y}}$
11) $\log_a \sqrt{\dfrac{x\sqrt{y}}{z}}$
12) $\log_a \sqrt[3]{\dfrac{x^2\sqrt{y}}{z}}$

6. Найдите значение выражения (сложные случаи):

1) $\log_2 \sqrt{8\sqrt{2}}$
2) $\log_3 \sqrt{27\sqrt[3]{9}}$
3) $\log_5 \sqrt{25\sqrt{5}}$
4) $\log_2 \sqrt[3]{16\sqrt{8}}$
5) $\log_3 \sqrt[3]{81\sqrt[4]{27}}$
6) $\log_4 \sqrt[4]{64\sqrt{16}}$
7) $\log_2 \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{4}}$
8) $\log_3 \dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt[4]{9}}$
9) $\log_5 \dfrac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt{25}}$
10) $\log_2 \sqrt{\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt[3]{16}}}$
11) $\log_3 \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt[4]{27}}}$
12) $\log_4 \sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{64}}{\sqrt[3]{32}}}$

7. Докажите тождество:

1) $\log_a \sqrt{b} = \dfrac{1}{2}\log_a b$

2) $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n}\log_a b$

3) $\log_a \sqrt{b} + \log_a \sqrt{c} = \log_a \sqrt{bc}$

4) $\log_a \sqrt{b} - \log_a \sqrt{c} = \log_a \sqrt{\dfrac{b}{c}}$

5) $\log_a \sqrt{b} \cdot \log_b \sqrt{a} = \dfrac{1}{4}$

6) $\log_{a^n} \sqrt{b} = \dfrac{1}{2n}\log_a b$

Переход к новому основанию

Теория

В этой главе мы рассмотрим одно из самых важных свойств логарифмов — формулу перехода к новому основанию. Это свойство позволяет выражать логарифмы через логарифмы с другим основанием, что часто бывает полезно при вычислениях и преобразованиях.

Формула перехода к новому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$.

Доказательство: Пусть $\log_a b = x$. Тогда $a^x = b$. Возьмём логарифм по основанию c от обеих частей:

$$\log_c(a^x) = \log_c b$$

$$x \log_c a = \log_c b$$

$$x = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

А так как $x = \log_a b$, то получаем искомую формулу.

Следствие 1:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

(получается при $c = b$)

Следствие 2:

$$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$$

(получается при $c = a$)

Следствие 3:

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$$

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Переход к десятичному логарифму

Выразим $\log_2 5$ через десятичные логарифмы.

По формуле перехода:

$$\log_2 5 = \frac{\lg 5}{\lg 2}$$

Пример 2

Переход к натуральному логарифму

Выразим $\log_3 7$ через натуральные логарифмы.

$$\log_3 7 = \frac{\ln 7}{\ln 3}$$

Пример 3

Вычисление с помощью калькулятора

Найдём приближённое значение $\log_2 3$ с помощью калькулятора.

$\lg 3 \approx 0.4771$, $\lg 2 \approx 0.3010$, поэтому

$$\log_2 3 \approx \frac{0.4771}{0.3010} \approx 1.585$$

Пример 4

Следствие 1

Найдём значение выражения:

$$\log_2 3 \cdot \log_3 2$$

По следствию 1, $\log_3 2 = \frac{1}{\log_2 3}$, поэтому произведение равно 1.
Ответ: 1.

Пример 5

Следствие 2

Упростим выражение:

$$\log_4 8$$

Представим 4 как 2^2. Тогда

$$\log_4 8 = \log_{2^2} 8 = \frac{1}{2} \log_2 8 = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

Пример 6

Следствие 3

Найдём значение выражения:

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 2$$

По следствию 3, это произведение равно 1.

Пример 7

Приведение к одному основанию

Упростим выражение:

$$\log_2 3 + \log_4 9$$

Приведём второй логарифм к основанию 2:

$$\log_4 9 = \log_{2^2} 3^2 = \frac{2}{2} \log_2 3 = \log_2 3$$

Тогда сумма равна $2 \log_2 3$.

Пример 8

Сложный случай

Упростим выражение:

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$$

Это произведение по цепочке: все промежуточные основания сокращаются, и остаётся $\log_2 8 = 3$.

Пример 9

Выражение с разными основаниями

Упростим выражение:

$$\frac{\log_2 3}{\log_2 5} + \frac{\log_3 2}{\log_3 5}$$

Заметим, что $\frac{\log_2 3}{\log_2 5} = \log_5 3$ (по формуле перехода), и $\frac{\log_3 2}{\log_3 5} = \log_5 2$. Тогда сумма равна $\log_5 3 + \log_5 2 = \log_5 6$.

Задачи

1. Выразите через натуральные логарифмы:

1) $\log_2 3$ 4) $\log_7 2$ 7) $\log_5 10$ 10) $\log_3 e$

2) $\log_3 5$ 5) $\log_2 10$ 8) $\log_7 10$ 11) $\log_5 e$

3) $\log_5 7$ 6) $\log_3 10$ 9) $\log_2 e$ 12) $\log_7 e$

2. Выразите через десятичные логарифмы:

1) $\log_2 3$ 4) $\log_7 2$ 7) $\log_5 10$ 10) $\ln 3$

2) $\log_3 5$ 5) $\log_2 10$ 8) $\log_7 10$ 11) $\ln 5$

3) $\log_5 7$ 6) $\log_3 10$ 9) $\ln 2$ 12) $\ln 7$

3. Найдите значение выражения (используя следствие 1):

1) $\log_2 3 \cdot \log_3 2$ 5) $\log_2 7 \cdot \log_7 2$ 9) $\log_2 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 2$

2) $\log_3 5 \cdot \log_5 3$ 6) $\log_3 7 \cdot \log_7 3$ 10) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 2$

3) $\log_5 7 \cdot \log_7 5$ 7) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 2$ 11) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 2$

4) $\log_2 5 \cdot \log_5 2$ 8) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 2$ 12) $\log_2 4 \cdot \log_4 8 \cdot \log_8 16 \cdot \log_{16} 2$

4. Найдите значение выражения (используя следствие 2):

1) $\log_4 8$ 4) $\log_{16} 64$ 7) $\log_4 2$ 10) $\log_{16} 2$

2) $\log_8 16$ 5) $\log_{25} 125$ 8) $\log_8 2$ 11) $\log_{25} 5$

3) $\log_9 27$ 6) $\log_{27} 81$ 9) $\log_9 3$ 12) $\log_{27} 3$

5. Упростите выражение, приведя к одному основанию:

1) $\log_2 3 + \log_4 9$ 5) $\log_3 7 + \log_9 49$ 9) $\log_2 5 \cdot \log_5 2$

2) $\log_3 4 + \log_9 16$ 6) $\log_2 3 - \log_4 9$ 10) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5$

3) $\log_5 6 + \log_{25} 36$ 7) $\log_3 4 - \log_9 16$ 11) $\frac{\log_2 3}{\log_2 5} + \frac{\log_3 2}{\log_3 5}$

4) $\log_2 5 + \log_4 25$ 8) $\log_5 6 - \log_{25} 36$ 12) $\frac{\log_2 3}{\log_4 3} + \frac{\log_3 2}{\log_9 2}$

6. Найдите значение выражений:

1) $(\log_2 3)^2 - (\log_2 3) \cdot (\log_2 12) + (\log_2 4)^2$

2) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$

3) $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 9$

4) $\frac{\log_2 3}{\log_4 3} \cdot \frac{\log_3 4}{\log_5 4} \cdot \frac{\log_4 5}{\log_6 5} \cdot \frac{\log_5 6}{\log_7 6} \cdot \frac{\log_6 7}{\log_8 7}$

5) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 + \log_3 4 \cdot \log_4 5 + \log_4 5 \cdot \log_5 6$

6) $\frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_3 4} + \frac{1}{\log_4 5} + \frac{1}{\log_5 6}$

7) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 2 - 1$

8) $(\log_2 3 + \log_3 2)^2 - (\log_2 3)^2 - (\log_3 2)^2$

9) $\frac{\log_2 3}{\log_2 4} + \frac{\log_3 4}{\log_3 5} + \frac{\log_4 5}{\log_4 6}$

10) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 2$

11) $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 3$

12) $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 4$

7. Докажите тождество:

1) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

2) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

3) $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$

4) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$

5) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$

6) $\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$

Практика по блоку 2

Теория

В этом блоке мы изучили основные свойства логарифмов:

- Логарифм произведения: $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$
- Логарифм частного: $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
- Логарифм степени: $\log_a b^k = k \log_a b$
- Логарифм корня: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$
- Переход к новому основанию: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

В этой главе собраны задачи на все эти свойства вперемешку. Ваша задача — определить, какое свойство (или комбинацию свойств) нужно применить в каждом конкретном случае.

Задачи

1. Найдите значение выражения:

1) $\log_2 8 + \log_2 4$

2) $\log_3 27 - \log_3 9$

3) $\log_5 25 \cdot \log_5 5$

4) $\frac{\log_2 16}{\log_2 4}$

5) $\log_4 2 + \log_4 8$

6) $\log_9 3 - \log_9 27$

7) $\log_2 \sqrt{8}$

8) $\log_3 \sqrt[3]{27}$

9) $\log_5 \frac{1}{25}$

10) $\log_7 \sqrt{49}$

11) $\log_2 3 \cdot \log_3 4$

12) $\log_4 8 \cdot \log_8 16$

2. Упростите выражение:

1) $\log_a x + \log_a y$

2) $\log_a x - \log_a y$

3) $\log_a x^2$

4) $\log_a \sqrt{x}$

5) $\log_a \frac{x}{y^2}$

6) $\log_a(x^2y^3)$

7) $\log_a \frac{\sqrt{x}}{y}$

8) $\log_a \sqrt{\frac{x}{y}}$

9) $\log_a x^2 \cdot \log_x a$

10) $\frac{\log_a x}{\log_a y}$

11) $\log_{a^2} x$

12) $\log_a x \cdot \log_x y \cdot \log_y a$

3. Представьте в виде суммы или разности логарифмов:

1) $\log_2(8 \cdot 16)$

2) $\log_3 \frac{27}{9}$

3) $\log_5(25 \cdot 125)$

4) $\log_7 \frac{343}{49}$

5) $\log_2(4^3 \cdot 8^2)$

6) $\log_3 \frac{9^4}{27^2}$

7) $\log_5 \sqrt{125}$

8) $\log_7 \sqrt[3]{343}$

9) $\log_2 \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}}$

10) $\log_3 \sqrt{\frac{27}{9}}$

11) $\log_4(16\sqrt{4})$

12) $\log_6 \frac{36}{\sqrt{216}}$

4. Представьте в виде логарифма одного выражения:

1) $\log_2 3+\log_2 5$

2) $\log_3 7-\log_3 4$

3) $2\log_2 3$

4) $\frac{1}{2}\log_3 5$

5) $\log_2 3+\log_2 4-\log_2 6$

6) $\log_3 5+\log_3 6-\log_3 2$

7) $2\log_2 3+3\log_2 5$

8) $\frac{1}{2}\log_3 4-\frac{1}{3}\log_3 8$

9) $\log_2 3+\log_4 9$

10) $\log_3 4+\log_9 16$

11) $\log_2 3\cdot\log_3 4$

12) $\frac{\log_2 3}{\log_2 5}+\frac{\log_3 2}{\log_3 5}$

5. Найдите значение выражения:

1) $\log_2 6+\log_2 3-\log_2 9$

2) $\log_3 15-\log_3 5+\log_3 2$

3) $\log_5 50-\log_5 2+\log_5 5$

4) $\log_2 48-\log_2 3-\log_2 4$

5) $\log_3 81-\log_3 9+\log_3 27$

6) $\log_4 64-\log_4 16+\log_4 4$

7) $\log_2\sqrt{8}+\log_2\sqrt{2}-\log_2 2$

8) $\log_3\sqrt{27}-\log_3\sqrt{3}+\log_3 3$

9) $\log_5\sqrt[3]{125}\cdot\log_5\sqrt[3]{25}$

10) $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 2$

11) $\log_4 8\cdot\log_8 16\cdot\log_{16} 32$

12) $\log_9 27\cdot\log_{27} 81\cdot\log_{81} 243$

6. Решите уравнение (используя свойства логарифмов):

1) $\log_2 x+\log_2 3=\log_2 15$

2) $\log_3 x-\log_3 4=\log_3 5$

3) $\log_5(x+1)+\log_5(x-1)=\log_5 8$

4) $\lg(x+2)-\lg 3=\lg 5$

5) $\ln(x-1)+\ln 2=\ln(3x-5)$

6) $\log_2(x-2)+\log_2(x-3)=1$

7) $\log_3(x+2)-\log_3(x-1)=1$

8) $\log_5(2x-1)-\log_5(x+2)=0$

9) $\log_2(x^2-3x)=\log_2 4$

10) $\log_3(x^2-4)=\log_3(3x-2)$

11) $\log_2 x+\log_4 x=3$

12) $\log_3 x+\log_9 x=6$

7. Докажите тождество:

1) $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$

2) $\log_a\frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$

3) $\log_a b^n=n\log_a b$

4) $\log_a\sqrt[n]{b}=\frac{1}{n}\log_a b$

5) $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$

6) $\log_a b\cdot\log_b a=1$

7) $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=1$

8) $\log_{a^n} b=\frac{1}{n}\log_a b$

8. Задачи повышенной сложности:

1) $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_{31} 32$

2) $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_n(n+1)$

3) $\frac{1}{\log_2 3}+\frac{1}{\log_3 4}+\frac{1}{\log_4 5}+\cdots+\frac{1}{\log_{99} 100}$

4) $\log_2 3\cdot\log_3 4+\log_3 4\cdot\log_4 5+\cdots+\log_{99} 100\cdot\log_{100} 101$

5) $(\log_2 3)^2+(\log_2 5)^2-(\log_2 15)^2$

6) $(\log_2 3)^3+(\log_2 5)^3+(\log_2 6)^3-3\log_2 3\cdot\log_2 5\cdot\log_2 6$

7) $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 8-\log_2 8$

8) $\frac{\log_2 3}{\log_2 4}+\frac{\log_3 4}{\log_3 5}+\frac{\log_4 5}{\log_4 6}+\frac{\log_5 6}{\log_5 7}$

9) $\log_2 3\cdot\log_4 5\cdot\log_6 7\cdot\log_8 9-\log_2 9$

10) $\log_3 4\cdot\log_5 6\cdot\log_7 8\cdot\log_9 10$

11) $\frac{\log_2 3}{\log_3 2}+\frac{\log_3 4}{\log_4 3}+\frac{\log_4 5}{\log_5 4}$

12) $\log_2 3\cdot\log_3 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 2-1$

Упрощение выражений с одним логарифмом

Теория

В этой главе мы научимся упрощать выражения, содержащие один логарифм. Здесь нам потребуются все изученные свойства: логарифм произведения, частного, степени и корня, а также переход к новому основанию.

Основные приёмы:

- Если под логарифмом стоит произведение — раскладываем на сумму.
- Если под логарифмом стоит частное — раскладываем на разность.
- Если под логарифмом стоит степень — выносим показатель.
- Если под логарифмом стоит корень — представляем как степень и выносим.
- Если нужно изменить основание — используем формулу перехода.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Произведение под логарифмом

Упростим выражение:

$$\log_2(8 \cdot 16 \cdot 32)$$

$$\log_2(8 \cdot 16 \cdot 32) = \log_2 8 + \log_2 16 + \log_2 32 = 3 + 4 + 5 = 12$$

Можно иначе: $8 \cdot 16 \cdot 32 = 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5 = 2^{12}$, поэтому $\log_2 2^{12} = 12$.

Пример 2

Частное под логарифмом

Упростим выражение:

$$\log_3 \frac{27 \cdot 81}{9}$$

$$\log_3 \frac{27 \cdot 81}{9} = \log_3 27 + \log_3 81 - \log_3 9 = 3 + 4 - 2 = 5$$

Или: $\dfrac{27 \cdot 81}{9} = \dfrac{3^3 \cdot 3^4}{3^2} = 3^{3+4-2} = 3^5$, поэтому $\log_3 3^5 = 5$.

Пример 3

Степень под логарифмом

Упростим выражение:

$$\log_4 8^3$$

Сначала можно представить 8 как 2^3, а 4 как 2^2:

$$\log_4 8^3 = 3 \log_4 8 = 3 \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

Или: $8^3 = (2^3)^3 = 2^9$, $\log_4 2^9 = 9 \log_4 2 = 9 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$.

Пример 4

Корень под логарифмом

Упростим выражение:

$$\log_5 \sqrt[3]{125 \cdot 25}$$

$$\log_5 \sqrt[3]{125 \cdot 25} = \frac{1}{3}\log_5(125 \cdot 25) = \frac{1}{3}(\log_5 125 + \log_5 25) = \frac{1}{3}(3+2) = \frac{5}{3}$$

Пример 5

Комбинация всех свойств

Упростим выражение:

$$\log_2 \frac{8^3 \cdot \sqrt{32}}{4^2 \cdot \sqrt[3]{16}}$$

Преобразуем всё к степеням двойки: $8 = 2^3$, $8^3 = 2^9$ $\sqrt{32} = 32^{1/2} = (2^5)^{1/2} = 2^{5/2}$ $4 = 2^2$, $4^2 = 2^4$ $\sqrt[3]{16} = 16^{1/3} = (2^4)^{1/3} = 2^{4/3}$

Под логарифмом: $\dfrac{2^9 \cdot 2^{5/2}}{2^4 \cdot 2^{4/3}} = \dfrac{2^{9+5/2}}{2^{4+4/3}} = \dfrac{2^{23/2}}{2^{16/3}} = 2^{23/2-16/3}$

Приведём к общему знаменателю: $\dfrac{23}{2} - \dfrac{16}{3} = \dfrac{69}{6} - \dfrac{32}{6} = \dfrac{37}{6}$

Значит, $\log_2 2^{37/6} = \dfrac{37}{6}$.

Пример 6

Выражение с разными основаниями

Упростим выражение:

$$\log_4 9 \cdot \log_3 2$$

Приведём первый логарифм к основанию 3:

$$\log_4 9 = \frac{\log_3 9}{\log_3 4} = \frac{2}{\log_3 4}$$

Тогда произведение равно $\dfrac{2}{\log_3 4} \cdot \log_3 2 = \dfrac{2\log_3 2}{\log_3 4} = 2 \cdot \frac{\log_3 2}{\log_3 4} = 2\log_4 2 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

Пример 7

Логарифм от логарифма (нестандартный случай)

Найдём значение выражения:

$$\log_2 \log_3 81$$

Сначала $\log_3 81 = 4$, затем $\log_2 4 = 2$.

Ответ: 2.

Пример 8

Упрощение с переменными

Упростим выражение:

$$\log_a \frac{a^2\sqrt[3]{b}}{c^4}$$

$$\log_a \frac{a^2\sqrt[3]{b}}{c^4} = \log_a a^2 + \log_a \sqrt[3]{b} - \log_a c^4 = 2 + \frac{1}{3}\log_a b - 4\log_a c$$

Задачи

1. Упростите выражение (все числа известны, найдите значение):

1) $\log_2(4 \cdot 8 \cdot 16)$

2) $\log_3(9 \cdot 27 \cdot 81)$

3) $\log_5(25 \cdot 125 \cdot 625)$

4) $\log_2 \frac{32 \cdot 64}{16}$

5) $\log_3 \frac{81 \cdot 27}{9}$

6) $\log_5 \frac{125 \cdot 625}{25}$

7) $\log_2 4^3 \cdot 8^2$

8) $\log_3 9^4 \cdot 27^3$

9) $\log_5 25^5 \cdot 125^2$

10) $\log_2 \sqrt{16 \cdot 64}$

11) $\log_3 \sqrt[3]{27 \cdot 81}$

12) $\log_5 \sqrt[4]{625 \cdot 125}$

2. Упростите выражение:

1) $\log_2 \frac{8^2 \cdot 4^3}{16^2}$

2) $\log_3 \frac{27^3 \cdot 9^4}{81^2}$

3) $\log_5 \frac{125^4 \cdot 25^3}{625^2}$

4) $\log_2 \frac{\sqrt{32} \cdot 8^2}{4^3}$

5) $\log_3 \frac{\sqrt[3]{81} \cdot 27^3}{9^4}$

6) $\log_5 \frac{\sqrt[4]{625} \cdot 125^2}{25^3}$

7) $\log_2 \sqrt{\frac{8^3 \cdot 4^2}{16^2}}$

8) $\log_3 \sqrt[3]{\frac{27^4 \cdot 9^3}{81^2}}$

9) $\log_5 \sqrt[4]{\frac{125^5 \cdot 25^4}{625^3}}$

10) $\log_2 2^{\log_2 3 + \log_2 5}$

11) $\log_3 3^{\log_3 4 - \log_3 2}$

12) $\log_5 5^{2\log_5 3 + \log_5 7}$

3. Упростите выражение с переменными:

1) $\log_a(a^2 b)$

2) $\log_a \frac{a^3}{b}$

3) $\log_a \frac{a^2 b}{c}$

4) $\log_a(a^3\sqrt{b})$

5) $\log_a \frac{\sqrt{a}}{b^2}$

6) $\log_a \frac{a^2\sqrt[3]{b}}{c^4}$

7) $\log_a \frac{a^5\sqrt{b}}{c^3 d^2}$

8) $\log_a \sqrt{\frac{a^3 b^2}{c^4}}$

9) $\log_a \sqrt[3]{\frac{a^4\sqrt{b}}{c^2}}$

10) $\log_a a^{\log_a b + \log_a c}$

11) $\log_a a^{\log_a b - \log_a c}$

12) $\log_a a^{2\log_a b - 3\log_a c}$

4. Найдите значение выражения (с разными основаниями):

1) $\log_4 8$

2) $\log_8 16$

3) $\log_9 27$

4) $\log_{16} 32$

5) $\log_2 3 \cdot \log_3 4$

6) $\log_3 4 \cdot \log_4 5$

7) $\log_5 6 \cdot \log_6 7$

8) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5$

9) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 2$

10) $\log_4 9 \cdot \log_3 2$

11) $\log_8 27 \cdot \log_3 2$

12) $\log_9 16 \cdot \log_2 3$

5. Найдите значение выражения (логарифм от логарифма):

1) $\log_2 \log_2 16$

2) $\log_3 \log_3 27$

3) $\log_5 \log_5 125$

4) $\log_2 \log_3 9$

5) $\log_3 \log_4 64$

6) $\log_4 \log_2 16$

7) $\log_2 \log_4 16$

8) $\log_3 \log_9 27$

9) $\log_5 \log_{25} 125$

10) $\log_2 \log_3 81$

11) $\log_3 \log_5 125$

12) $\log_4 \log_2 8$

6. Задачи повышенной сложности:

1) $\log_2 \sqrt{2+\sqrt{3}} + \log_2 \sqrt{2-\sqrt{3}}$

2) $\log_3 \sqrt{5+\sqrt{24}} + \log_3 \sqrt{5-\sqrt{24}}$

3) $\log_2(3+\sqrt{5}) + \log_2(3-\sqrt{5})$

4) $\log_3(4+\sqrt{7}) + \log_3(4-\sqrt{7})$

5) $\log_2(\sqrt{6}+\sqrt{2}) + \log_2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

6) $\log_3(\sqrt{10}+\sqrt{6}) + \log_3(\sqrt{10}-\sqrt{6})$

7) $\log_2 \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \log_2(1+\sqrt{2})$

8) $\log_3 \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} + \log_3(2+\sqrt{3})$

9) $\log_5 \dfrac{1}{\sqrt{5}+2} + \log_5(\sqrt{5}+2)$

10) $\log_2(\sqrt{3}+1) + \log_2(\sqrt{3}-1)$

11) $\log_3(\sqrt{5}+2) + \log_3(\sqrt{5}-2)$

12) $\log_7(\sqrt{2}+1) + \log_7(\sqrt{2}-1)$

Упрощение выражений с несколькими логарифмами

Теория

В этой главе мы научимся упрощать выражения, содержащие несколько логарифмов. Здесь нам потребуются все изученные свойства, а также умение комбинировать их в разных сочетаниях.

Основные приёмы:

- Сложение и вычитание логарифмов с одинаковыми основаниями — сворачиваем в один логарифм.
- Умножение и деление логарифмов — обычно приводит к более сложным выражениям, часто требует перехода к новому основанию.
- Если основания разные — пробуем привести к одному основанию.
- Если в выражении есть числа — представляем их как логарифмы (например, $1 = \log_a a$, $0 = \log_a 1$).

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Сумма логарифмов

Упростим выражение:

$$\log_2 3 + \log_2 5 - \log_2 7$$

Сначала сумму двух первых превратим в логарифм произведения:

$$\log_2 3 + \log_2 5 = \log_2(3 \cdot 5) = \log_2 15$$

Теперь вычитаем $\log_2 7$:

$$\log_2 15 - \log_2 7 = \log_2 \frac{15}{7}$$

Ответ: $\log_2 \frac{15}{7}$.

Пример 2

Выражение с коэффициентами

Упростим выражение:

$$2\log_2 3 + 3\log_2 5 - \log_2 7$$

Вносим коэффициенты под знак логарифма:

$$2\log_2 3 = \log_2 3^2 = \log_2 9$$

$$3\log_2 5 = \log_2 5^3 = \log_2 125$$

Теперь сумма:

$$\log_2 9 + \log_2 125 = \log_2(9 \cdot 125) = \log_2 1125$$

Вычитаем $\log_2 7$:

$$\log_2 1125 - \log_2 7 = \log_2 \frac{1125}{7}$$

Пример 3

Выражение с разными основаниями

Упростим выражение:

$$\log_2 3 + \log_4 9$$

Приведём второй логарифм к основанию 2:

$$\log_4 9 = \frac{\log_2 9}{\log_2 4} = \frac{2\log_2 3}{2} = \log_2 3$$

Тогда сумма равна $2\log_2 3 = \log_2 9$.

Пример 4

Выражение с числами

Упростим выражение:

$$\log_2 3 + \log_2 5 - 2$$

Представим 2 как $\log_2 4$:

$$\log_2 3 + \log_2 5 - \log_2 4 = \log_2 \frac{3 \cdot 5}{4} = \log_2 \frac{15}{4}$$

Пример 5

Сумма трёх логарифмов

Упростим выражение:

$$\log_2 3 + \log_2 4 + \log_2 5 - \log_2 6$$

Сворачиваем сумму первых трёх:

$$\log_2 3 + \log_2 4 + \log_2 5 = \log_2(3 \cdot 4 \cdot 5) = \log_2 60$$

Теперь вычитаем $\log_2 6$:

$$\log_2 60 - \log_2 6 = \log_2 \frac{60}{6} = \log_2 10$$

Пример 6

Произведение логарифмов

Упростим выражение:

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 2$$

Это произведение по цепочке. Заметим, что $\log_2 3 \cdot \log_3 4 = \log_2 4 = 2$. Затем $2 \cdot \log_4 5 = 2 \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 4} = 2 \cdot \frac{\log_2 5}{2} = \log_2 5$. И наконец $\log_2 5 \cdot \log_5 2 = 1$.

Ответ: 1.

Пример 7

Выражение с разными основаниями и числами

Упростим выражение:

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 + \log_2 5 \cdot \log_5 4$$

Первое слагаемое: $\log_2 3 \cdot \log_3 4 = \log_2 4 = 2$. Второе слагаемое: $\log_2 5 \cdot \log_5 4 = \log_2 4 = 2$. Сумма $2+2 = 4$.

Пример 8

Сложная комбинация

Упростим выражение:

$$\frac{\log_2 3}{\log_2 4} + \frac{\log_3 4}{\log_3 5} + \frac{\log_4 5}{\log_4 6}$$

Каждое слагаемое можно упростить: $\frac{\log_2 3}{\log_2 4} = \log_4 3$ $\frac{\log_3 4}{\log_3 5} = \log_5 4$ $\frac{\log_4 5}{\log_4 6} = \log_6 5$

Получили сумму $\log_4 3 + \log_5 4 + \log_6 5$. Это выражение дальше не упрощается.

Пример 9

Выражение с логарифмами от логарифмов

Упростим выражение:

$$\log_2(\log_3 9) + \log_3(\log_2 8)$$

$\log_3 9 = 2$, $\log_2 8 = 3$, поэтому получаем $\log_2 2 + \log_3 3 = 1 + 1 = 2$.

Задачи

1. Упростите выражение:

1) $\log_2 3 + \log_2 5$
2) $\log_3 7 - \log_3 4$
3) $\log_5 2 + \log_5 3 + \log_5 7$
4) $\log_2 3 + \log_2 5 - \log_2 7$
5) $\log_3 4 + \log_3 5 - \log_3 2$
6) $\log_5 6 + \log_5 7 - \log_5 3$
7) $\log_2 8 - \log_2 3 - \log_2 5$
8) $\log_3 27 - \log_3 4 - \log_3 5$
9) $\log_5 125 - \log_5 2 - \log_5 3$
10) $\log_2 3 + \log_2 5 + \log_2 7 - \log_2 2$
11) $\log_3 4 + \log_3 5 + \log_3 6 - \log_3 3$
12) $\log_5 6 + \log_5 7 + \log_5 8 - \log_5 5$

2. Упростите выражение:

1) $2\log_2 3 + 3\log_2 5$
2) $3\log_3 4 - 2\log_3 5$
3) $4\log_5 2 + 2\log_5 3 - \log_5 7$
4) $2\log_2 3 + \log_2 5 - 3\log_2 7$
5) $3\log_3 4 - 2\log_3 5 + \log_3 6$
6) $4\log_5 2 - 3\log_5 3 + 2\log_5 7$
7) $\frac{1}{2}\log_2 3 + \frac{1}{3}\log_2 5$
8) $\frac{2}{3}\log_3 4 - \frac{1}{2}\log_3 5$
9) $\frac{3}{4}\log_5 2 + \frac{1}{4}\log_5 3 - \frac{1}{2}\log_5 7$
10) $2\log_2 3 \cdot 3\log_2 5$ (внимание: это умножение, а не сложение)
11) $(2\log_2 3) \cdot (3\log_2 5)$
12) $\frac{2\log_2 3}{3\log_2 5}$

3. Упростите выражение:

1) $\log_2 3 + \log_4 9$
2) $\log_3 4 + \log_9 16$
3) $\log_5 6 + \log_{25} 36$
4) $\log_2 3 - \log_4 9$
5) $\log_3 4 - \log_9 16$
6) $\log_5 6 - \log_{25} 36$
7) $\log_2 3 \cdot \log_3 4$
8) $\log_3 4 \cdot \log_4 5$
9) $\log_5 6 \cdot \log_6 7$
10) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5$
11) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 2$
12) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 2$

4. Упростите выражение:

1) $\log_2 3 + \log_2 5 - 1$
2) $\log_3 4 + \log_3 5 - 2$
3) $\log_5 6 + \log_5 7 - 3$
4) $2\log_2 3 + \log_2 5 - 2$
5) $3\log_3 4 - 2\log_3 5 + 1$
6) $4\log_5 2 - 3\log_5 3 - 2$
7) $\log_2 3 + \log_4 9 - 2$
8) $\log_3 4 + \log_9 16 - 3$
9) $\log_5 6 + \log_{25} 36 - 4$
10) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 - 1$
11) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 - 2$
12) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 2 - 1$

5. Найдите значение выражения:

1) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$
2) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 2$
3) $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 3$
4) $\log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 - 6$
5) $(\log_2 3)^2 + (\log_2 5)^2 - (\log_2 15)^2$
6) $(\log_2 3)^2 + (\log_2 4)^2 - (\log_2 12)^2$
7) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 + \log_3 4 \cdot \log_4 5 + \log_4 5 \cdot \log_5 6$
8) $\frac{\log_2 3}{\log_2 4} + \frac{\log_3 4}{\log_3 5} + \frac{\log_4 5}{\log_4 6}$
9) $\frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_3 4} + \frac{1}{\log_4 5} + \frac{1}{\log_5 6}$
10) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 2 - 1$
11) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 2$
12) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 6 \cdot \log_6 2$

6. Упростите выражение):

1) $\log_a b + \log_a c$
2) $\log_a b - \log_a c$
3) $\log_a b + \log_a c - \log_a d$
4) $2\log_a b + 3\log_a c$

5) $\frac{1}{2}\log_a b - \frac{1}{3}\log_a c$

6) $\log_a b + \log_{a^2} c$

7) $\log_a b \cdot \log_b c$

8) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a$

9) $\frac{\log_a b}{\log_a c}$

10) $\log_a b + \log_b a$

11) $(\log_a b)^2 + (\log_b a)^2 - 2$

12) $\frac{\log_a b}{\log_{a^2} b} + \frac{\log_b a}{\log_{b^2} a}$

Приведение к одному основанию

Теория

В этой главе мы научимся упрощать выражения, содержащие логарифмы с разными основаниями. Основной инструмент — формула перехода к новому основанию, которая позволяет выразить любой логарифм через логарифмы с нужным основанием.

Формула перехода:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Полезные частные случаи:

- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
- $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$
- $\log_a b^n = n \log_a b$

Основные приёмы:

- Выбираем удобное основание (чаще всего то, которое уже есть в большинстве логарифмов).
- Приводим все логарифмы к этому основанию.
- После приведения упрощаем выражение, используя другие свойства.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Сумма логарифмов с разными основаниями

Упростим выражение:

$$\log_2 3 + \log_4 5$$

Приведём второй логарифм к основанию 2:

$$\log_4 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 4} = \frac{\log_2 5}{2}$$

Тогда сумма равна:

$$\log_2 3 + \frac{\log_2 5}{2} = \frac{2\log_2 3 + \log_2 5}{2} = \frac{\log_2(3^2 \cdot 5)}{2} = \frac{\log_2 45}{2}$$

Ответ: $\dfrac{1}{2}\log_2 45$.

Пример 2

Разность логарифмов с разными основаниями

Упростим выражение:

$$\log_3 7 - \log_9 5$$

Приведём второй логарифм к основанию 3:

$$\log_9 5 = \frac{\log_3 5}{\log_3 9} = \frac{\log_3 5}{2}$$

Тогда разность равна:

$$\log_3 7 - \frac{\log_3 5}{2} = \frac{2\log_3 7 - \log_3 5}{2} = \frac{\log_3(7^2/5)}{2} = \frac{\log_3(49/5)}{2}$$

Пример 3

Произведение логарифмов с разными основаниями

Упростим выражение:

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4$$

Это произведение можно упростить, не приводя к одному основанию, а заметив, что $\log_3 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 3}$. Тогда:

$$\log_2 3 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} = \log_2 4 = 2$$

Пример 4

Выражение с тремя разными основаниями

Упростим выражение:

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5$$

Последовательно: $\log_2 3 \cdot \log_3 4 = \log_2 4 = 2$ $2 \cdot \log_4 5 = 2 \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 4} = 2 \cdot \frac{\log_2 5}{2} = \log_2 5$

Ответ: $\log_2 5$.

Пример 5

Выражение с корнями в основаниях

Упростим выражение:

$$\log_{\sqrt{2}} 3 + \log_2 5$$

Приведём первый логарифм к основанию 2:

$$\log_{\sqrt{2}} 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 \sqrt{2}} = \frac{\log_2 3}{\frac{1}{2}} = 2\log_2 3$$

Тогда сумма равна $2\log_2 3 + \log_2 5 = \log_2(3^2 \cdot 5) = \log_2 45$.

Пример 6

Выражение со степенями в основаниях

Упростим выражение:

$$\log_4 9 + \log_8 27$$

Приведём к основанию 2: $\log_4 9 = \log_{2^2} 3^2 = \frac{2}{2}\log_2 3 = \log_2 3$ $\log_8 27 = \log_{2^3} 3^3 = \frac{3}{3}\log_2 3 = \log_2 3$

Сумма равна $2\log_2 3 = \log_2 9$.

Пример 7

Выражение с десятичными и натуральными логарифмами

Упростим выражение:

$$\lg 2 \cdot \ln 10$$

Заметим, что $\ln 10 = \frac{1}{\lg e}$? Нет, проще: $\lg 2 = \frac{\ln 2}{\ln 10}$, тогда

$$\lg 2 \cdot \ln 10 = \frac{\ln 2}{\ln 10} \cdot \ln 10 = \ln 2$$

Пример 8

Сложное выражение

Упростим выражение:

$$\frac{\log_2 3}{\log_2 4} + \frac{\log_3 4}{\log_3 5} + \frac{\log_4 5}{\log_4 6}$$

Каждое слагаемое — это логарифм по новому основанию: $\frac{\log_2 3}{\log_2 4} = \log_4 3$ $\frac{\log_3 4}{\log_3 5} = \log_5 4$ $\frac{\log_4 5}{\log_4 6} = \log_6 5$

Получили сумму $\log_4 3 + \log_5 4 + \log_6 5$. Это выражение дальше не упрощается.

Задачи

1. Приведите к основанию 2:

1) $\log_4 3$
2) $\log_8 5$
3) $\log_{16} 7$
4) $\log_{\frac{1}{2}} 3$
5) $\log_{\sqrt{2}} 5$
6) $\log_{2\sqrt{2}} 7$
7) $\log_4 9$
8) $\log_8 27$
9) $\log_{16} 81$
10) $\log_2 3 + \log_4 5$
11) $\log_2 5 - \log_8 3$
12) $\log_2 3 \cdot \log_4 5$

2. Приведите к основанию 3:

1) $\log_9 4$
2) $\log_{27} 5$
3) $\log_{81} 7$
4) $\log_{\frac{1}{3}} 4$
5) $\log_{\sqrt{3}} 5$
6) $\log_{3\sqrt{3}} 7$
7) $\log_9 16$
8) $\log_{27} 64$
9) $\log_{81} 256$
10) $\log_3 4 + \log_9 5$
11) $\log_3 5 - \log_{27} 4$
12) $\log_3 4 \cdot \log_9 5$

3. Упростите выражение:

1) $\log_4 8 + \log_2 4$
2) $\log_9 27 + \log_3 9$
3) $\log_8 16 + \log_4 8$
4) $\log_4 8 - \log_2 4$
5) $\log_9 27 - \log_3 9$
6) $\log_8 16 - \log_4 8$
7) $\log_4 8 \cdot \log_2 4$
8) $\log_9 27 \cdot \log_3 9$
9) $\log_8 16 \cdot \log_4 8$
10) $\frac{\log_4 8}{\log_2 4}$
11) $\frac{\log_9 27}{\log_3 9}$
12) $\frac{\log_8 16}{\log_4 8}$

4. Упростите выражение (приведите к одному основанию и сверните):

1) $\log_2 3 + \log_4 9$
2) $\log_3 4 + \log_9 16$
3) $\log_5 6 + \log_{25} 36$
4) $\log_2 5 + \log_4 25$
5) $\log_3 7 + \log_9 49$
6) $\log_5 8 + \log_{25} 64$
7) $\log_2 3 - \log_4 9$
8) $\log_3 4 - \log_9 16$
9) $\log_5 6 - \log_{25} 36$
10) $\log_2 3 \cdot \log_4 9$
11) $\log_3 4 \cdot \log_9 16$
12) $\log_5 6 \cdot \log_{25} 36$

5. Найдите значение выражения:

1) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 2$
2) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 6 \cdot \log_6 2$
3) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 4 \cdot \log_4 2$
4) $\log_4 9 \cdot \log_9 16 \cdot \log_{16} 25 \cdot \log_{25} 2$
5) $\log_8 27 \cdot \log_9 16 \cdot \log_4 3 \cdot \log_3 2$
6) $\log_{\sqrt{2}} 3 \cdot \log_9 2 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 2$
7) $\frac{\log_2 3}{\log_2 4} + \frac{\log_3 4}{\log_3 5} + \frac{\log_4 5}{\log_4 6}$
8) $\frac{\log_2 3}{\log_4 3} + \frac{\log_3 4}{\log_5 4} + \frac{\log_4 5}{\log_6 5}$
9) $\frac{\log_2 3}{\log_8 3} + \frac{\log_3 4}{\log_9 4} + \frac{\log_4 5}{\log_{10} 5}$
10) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$
11) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 2$
12) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 6 \cdot \log_6 8 \cdot \log_8 2$

6. Упростите выражение (с переменными):

1) $\log_a b + \log_{a^2} b$
2) $\log_a b - \log_{a^3} b$
3) $\log_a b \cdot \log_{a^2} b$
4) $\log_a b + \log_b a$
5) $\log_a b - \log_b a$
6) $\log_a b \cdot \log_b a$
7) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a$
8) $\frac{\log_a b}{\log_{a^2} b} + \frac{\log_b a}{\log_{b^2} a}$
9) $\log_{a^n} b \cdot \log_{b^n} a$
10) $\log_a b \cdot \log_{b^2} c \cdot \log_c a$
11) $\log_{a^2} b \cdot \log_{b^2} c \cdot \log_{c^2} a$
12) $\frac{\log_a b}{\log_{ab} b} + \frac{\log_b a}{\log_{ab} a}$

Выражения с натуральными логарифмами

Теория

В этой главе мы рассмотрим упрощение выражений, содержащих натуральные логарифмы. Натуральные логарифмы (ln) — это логарифмы по основанию e, где $e \approx 2.71828$. Для них справедливы все те же свойства, что и для обычных логарифмов.

Особенности натуральных логарифмов:

- $\ln e = 1$
- $\ln 1 = 0$
- $\ln e^k = k$
- $e^{\ln a} = a$
- $\ln a^b = b \ln a$

Полезные соотношения:

- $\ln a + \ln b = \ln(ab)$
- $\ln a - \ln b = \ln \dfrac{a}{b}$
- $k \ln a = \ln a^k$
- $\dfrac{\ln a}{\ln b} = \log_b a$

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Простейшие выражения

Найдём значение выражения:

$$\ln e^5 + \ln e^3 - \ln e^2$$

$\ln e^5 = 5$, $\ln e^3 = 3$, $\ln e^2 = 2$, поэтому $5 + 3 - 2 = 6$.

Можно иначе: $\ln e^5 + \ln e^3 - \ln e^2 = \ln \dfrac{e^5 \cdot e^3}{e^2} = \ln e^{5+3-2} = \ln e^6 = 6$.

Пример 2

Произведение и частное

Упростим выражение:

$$\ln 2 + \ln 3 - \ln 5$$

$$\ln 2 + \ln 3 - \ln 5 = \ln \frac{2 \cdot 3}{5} = \ln \frac{6}{5}$$

Пример 3

Степени под логарифмом

Упростим выражение:

$$2 \ln 3 + 3 \ln 2 - \ln 5$$

$$2 \ln 3 = \ln 3^2 = \ln 9$$

$$3 \ln 2 = \ln 2^3 = \ln 8$$

$$\ln 9 + \ln 8 - \ln 5 = \ln \frac{9 \cdot 8}{5} = \ln \frac{72}{5}$$

Пример 4

Корни под логарифмом

Упростим выражение:

$$\ln\sqrt{2} + \ln\sqrt{3} - \ln\sqrt{5}$$

$$\ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2, \quad \ln\sqrt{3} = \frac{1}{2}\ln 3, \quad \ln\sqrt{5} = \frac{1}{2}\ln 5$$

$$\frac{1}{2}(\ln 2 + \ln 3 - \ln 5) = \frac{1}{2}\ln\frac{2\cdot 3}{5} = \frac{1}{2}\ln\frac{6}{5} = \ln\sqrt{\frac{6}{5}}$$

Пример 5

Выражения с числом e

Упростим выражение:

$$\ln e^x + \ln e^y - \ln e^z$$

$$\ln e^x = x, \quad \ln e^y = y, \quad \ln e^z = z$$

$$x + y - z$$

Пример 6

Переход от натуральных к десятичным

Выразим $\ln 5$ через десятичные логарифмы:

$$\ln 5 = \frac{\lg 5}{\lg e}$$

Пример 7

Сложное выражение с натуральными логарифмами

Упростим выражение:

$$\ln\frac{e^2\sqrt{e}}{e^3}$$

$$\frac{e^2\sqrt{e}}{e^3} = \frac{e^2\cdot e^{1/2}}{e^3} = \frac{e^{5/2}}{e^3} = e^{5/2-3} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Тогда $\ln\frac{1}{\sqrt{e}} = -\frac{1}{2}\ln e = -\frac{1}{2}$.

Пример 8

Выражение с переменными

Упростим выражение:

$$\ln\frac{x^2\sqrt{y}}{z^3}$$

$$\ln\frac{x^2\sqrt{y}}{z^3} = \ln x^2 + \ln\sqrt{y} - \ln z^3 = 2\ln x + \frac{1}{2}\ln y - 3\ln z$$

Задачи

1. Найдите значение выражения:

1) $\ln e$
2) $\ln e^2$
3) $\ln e^3$
4) $\ln e^4$
5) $\ln \frac{1}{e}$
6) $\ln \frac{1}{e^2}$
7) $\ln \sqrt{e}$
8) $\ln \sqrt[3]{e}$
9) $\ln \frac{1}{\sqrt{e}}$
10) $\ln e^{\pi}$
11) $\ln e^{\sqrt{2}}$
12) $\ln e^{\ln 2}$

2. Упростите выражение:

1) $\ln 2 + \ln 3$
2) $\ln 5 - \ln 2$
3) $\ln 2 + \ln 3 + \ln 5$
4) $\ln 2 + \ln 3 - \ln 5$
5) $\ln 4 + \ln 5 - \ln 2$
6) $\ln 6 - \ln 2 - \ln 3$
7) $2\ln 3 + 3\ln 2$
8) $3\ln 2 - 2\ln 3$
9) $\frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{3}\ln 2$
10) $\ln \sqrt{2} + \ln \sqrt{3}$
11) $\ln \sqrt{5} - \ln \sqrt{2}$
12) $\ln \sqrt[3]{2} + \ln \sqrt[3]{3} - \ln \sqrt[3]{5}$

3. Упростите выражение с числом e:

1) $\ln e^2 + \ln e^3$
2) $\ln e^5 - \ln e^2$
3) $\ln e^2 + \ln e^3 - \ln e^4$
4) $2\ln e^3 + 3\ln e^2$
5) $\frac{1}{2}\ln e^4 - \frac{1}{3}\ln e^6$
6) $\ln \frac{e^2 \cdot e^3}{e^4}$
7) $\ln \frac{e^5}{\sqrt{e}}$
8) $\ln \frac{\sqrt{e} \cdot e^3}{e^2}$
9) $\ln \frac{e^x \cdot e^y}{e^z}$
10) $\ln e^{2x} + \ln e^{3y} - \ln e^z$
11) $x\ln e + y\ln e - z\ln e$
12) $\ln e^{\ln 2} + \ln e^{\ln 3}$

4. Найдите значение выражения:

1) $e^{\ln 2}$
2) $e^{\ln 3}$
3) $e^{2\ln 2}$
4) $e^{3\ln 2}$
5) $e^{\frac{1}{2}\ln 4}$
6) $e^{\ln 2 + \ln 3}$
7) $e^{\ln 2 - \ln 3}$
8) $e^{2\ln 3 - \ln 2}$
9) $e^{\frac{1}{2}\ln 9 + \frac{1}{3}\ln 8}$
10) $e^{\ln 2} \cdot e^{\ln 3}$
11) $\frac{e^{\ln 5}}{e^{\ln 2}}$
12) $(e^{\ln 2})^3 \cdot e^{\ln 3}$

5. Упростите выражение (с переменными):

1) $\ln(xy)$
2) $\ln \frac{x}{y}$
3) $\ln(x^2y^3)$
4) $\ln \frac{x^2}{y^3}$
5) $\ln \sqrt{xy}$
6) $\ln \sqrt[3]{\frac{x}{y}}$
7) $\ln \frac{x^2\sqrt{y}}{z}$
8) $\ln \frac{x^3\sqrt[3]{y}}{z^2}$
9) $\ln \sqrt{\frac{x^2y}{z^3}}$
10) $\ln(e^x \cdot e^y)$
11) $\ln \frac{e^{2x}}{e^{3y}}$
12) $\ln \sqrt{e^x \cdot e^{2y}}$

6. Решите уравнение (используя свойства натуральных логарифмов):

1) $\ln x + \ln 2 = \ln 6$
2) $\ln x - \ln 3 = \ln 5$
3) $\ln(x+1) + \ln 2 = \ln 8$
4) $\ln(x-1) - \ln 2 = \ln 3$
5) $\ln x + \ln(x+1) = \ln 6$
6) $\ln x + \ln(x-2) = \ln 3$
7) $\ln(x+2) + \ln(x-1) = \ln 4$
8) $\ln(x^2-4) = \ln(3x-2)$
9) $\ln x + \ln x^2 = \ln 8$
10) $\ln x^2 - \ln x = \ln 3$
11) $\ln x + \ln x^2 + \ln x^3 = \ln 6$
12) $\ln(x^2-1) - \ln(x-1) = \ln 2$

7. Задачи повышенной сложности:

1) $\ln 2+\ln 3+\ln 5+\ln 7-\ln 210$

2) $\ln\sqrt{2+\sqrt{3}}+\ln\sqrt{2-\sqrt{3}}$

3) $\ln(3+\sqrt{5})+\ln(3-\sqrt{5})$

4) $\ln(\sqrt{6}+\sqrt{2})+\ln(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

5) $\ln\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\ln(1+\sqrt{2})$

6) $\ln\frac{1}{\sqrt{5}+2}+\ln(\sqrt{5}+2)$

7) $e^{\ln 2+\ln 3+\ln 5-\ln 30}$

8) $e^{2\ln 3-3\ln 2+\ln 5}$

9) $\frac{e^{\ln 2}\cdot e^{\ln 3}}{e^{\ln 5}}$

10) $\ln(e^{2x}-1)-\ln(e^{x}-1)-\ln(e^{x}+1)$

11) $\ln(e^{2x}+2e^{x}+1)-2\ln(e^{x}+1)$

12) $\ln(e^{4x}-1)-\ln(e^{2x}-1)-\ln(e^{2x}+1)$

Доказательство тождеств

Теория

В этой главе мы научимся доказывать тождества, содержащие логарифмы. Доказательство тождества — это преобразование одной части равенства в другую с использованием свойств логарифмов.

Основные приёмы доказательства:

- Преобразуем левую часть к правой (или наоборот).
- Используем все изученные свойства: логарифм произведения, частного, степени, корня, переход к новому основанию.
- Иногда полезно привести все логарифмы к одному основанию.
- Может потребоваться замена переменных или использование вспомогательных соотношений.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Простейшее тождество

Докажем, что:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

Это основное свойство, которое мы уже знаем. Доказательство: пусть $\log_a b = x$, $\log_a c = y$. Тогда $a^x = b$, $a^y = c$, значит $a^{x+y} = bc$, поэтому $\log_a(bc) = x + y = \log_a b + \log_a c$.

Пример 2

Тождество с переходом к новому основанию

Докажем, что:

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

По формуле перехода: $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$. Тогда $\log_a b \cdot \dfrac{1}{\log_a b} = 1$.

Пример 3

Более сложное тождество

Докажем, что:

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$$

Перейдём к основанию a: $\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$, $\log_c a = \dfrac{\log_a a}{\log_a c} = \dfrac{1}{\log_a c}$.

Тогда произведение равно:

$$\log_a b \cdot \frac{\log_a c}{\log_a b} \cdot \frac{1}{\log_a c} = 1$$

Пример 4

Тождество с суммой логарифмов

Докажем, что:

$$\log_a \frac{b}{c} + \log_a \frac{c}{d} + \log_a \frac{d}{b} = 0$$

Преобразуем левую часть:

$$\log_a \frac{b}{c} + \log_a \frac{c}{d} + \log_a \frac{d}{b} = \log_a \left(\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{b}\right) = \log_a 1 = 0$$

Пример 5

Тождество со степенью

Докажем, что:

$$\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b$$

По формуле перехода к основанию a:

$$\log_{a^n} b = \frac{\log_a b}{\log_a a^n} = \frac{\log_a b}{n\log_a a} = \frac{\log_a b}{n}$$

Пример 6

Тождество с корнем

Докажем, что:

$$\log_a \sqrt{b} + \log_a \sqrt{c} = \log_a \sqrt{bc}$$

Левая часть: $\frac{1}{2}\log_a b + \frac{1}{2}\log_a c = \frac{1}{2}(\log_a b + \log_a c) = \frac{1}{2}\log_a(bc) = \log_a \sqrt{bc}$.

Пример 7

Тождество с разными основаниями

Докажем, что:

$$\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$$

Левая часть: $\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$ по формуле перехода.

Пример 8

Сложное тождество

Докажем, что:

$$\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_{a^2} b} + \frac{1}{\log_{a^3} b} = \frac{6}{\log_a b}$$

Преобразуем каждое слагаемое: $\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$ $\frac{1}{\log_{a^2} b} = \log_b a^2 = 2\log_b a$ $\frac{1}{\log_{a^3} b} = \log_b a^3 = 3\log_b a$

Сумма: $\log_b a + 2\log_b a + 3\log_b a = 6\log_b a = \frac{6}{\log_a b}$.

Задачи

1. Докажите простейшие тождества:

1) $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$

2) $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

3) $\log_a b^k = k\log_a b$

4) $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n}\log_a b$

5) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$

6) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

2. Докажите тождества с произведением нескольких логарифмов:

1) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$

2) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d \cdot \log_d a = 1$

3) $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$

4) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d = \log_a d$

5) $\log_{a^n} b \cdot \log_{b^n} c = \log_a c$

6) $\log_a b \cdot \log_b a^n = n$

3. Докажите тождества с суммами логарифмов:

1) $\log_a \dfrac{b}{c} + \log_a \dfrac{c}{d} + \log_a \dfrac{d}{b} = 0$

2) $\log_a b + \log_b c + \log_c a = \dfrac{\log b}{\log a} + \dfrac{\log c}{\log b} + \dfrac{\log a}{\log c}$ (здесь log — любой)

3) $\log_a b + \log_a \dfrac{1}{b} = 0$

4) $\log_a b + \log_a b^2 + \log_a b^3 = 6\log_a b$

5) $\log_a b + \log_{a^2} b + \log_{a^3} b = \dfrac{11}{6}\log_a b$

6) $\log_a b + \log_{a^2} b^2 + \log_{a^3} b^3 = 3\log_a b$

4. Докажите тождества с корнями:

1) $\log_a \sqrt{b} + \log_a \sqrt{c} = \log_a \sqrt{bc}$

2) $\log_a \sqrt{b} - \log_a \sqrt{c} = \log_a \sqrt{\dfrac{b}{c}}$

3) $\log_a \sqrt{b} \cdot \log_b \sqrt{a} = \dfrac{1}{4}$

4) $\log_a \sqrt[3]{b} + \log_a \sqrt[3]{c} + \log_a \sqrt[3]{d} = \log_a \sqrt[3]{bcd}$

5) $\log_a \sqrt{b} + \log_a \sqrt[3]{b} + \log_a \sqrt[4]{b} = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}\right) \log_a b$

6) $\log_a \sqrt{b} \cdot \log_b \sqrt{c} \cdot \log_c \sqrt{a} = \dfrac{1}{8}$

5. Докажите тождества с разными основаниями:

1) $\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n} \log_a b$

2) $\log_a b^n = n \log_a b$

3) $\log_{a^n} b^n = \log_a b$

4) $\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m} \log_a b$

5) $\dfrac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$

6) $\dfrac{1}{\log_a b} + \dfrac{1}{\log_{a^2} b} = \dfrac{3}{2 \log_a b}$

6. Докажите более сложные тождества:

1) $\dfrac{\log_a b}{\log_a c} + \dfrac{\log_b c}{\log_b a} + \dfrac{\log_c a}{\log_c b} = \dfrac{\log_a b}{\log_a c} \cdot \dfrac{\log_b c}{\log_b a} \cdot \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$

2) $(\log_a b)^2 + (\log_b a)^2 \geq 2$

3) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$ (доказать тремя разными способами)

4) $\dfrac{1}{\log_2 \pi} + \dfrac{1}{\log_3 \pi} + \dfrac{1}{\log_4 \pi} + \dots + \dfrac{1}{\log_n \pi} = \log_\pi (n!)$

5) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d \cdot \log_d e = \log_a e$

6) $\log_a b \cdot \log_{a^2} b \cdot \log_{a^3} b \cdot \ldots \cdot \log_{a^n} b = \dfrac{1}{n!} (\log_a b)^n$

7. Докажите тождества, используя замену переменной:

1) Пусть $x = \log_a b$. Докажите, что $\log_{a^n} b = \dfrac{x}{n}$

2) Пусть $x = \log_a b$, $y = \log_b c$. Докажите, что $\log_a c = xy$

3) Пусть $x = \log_a b$. Докажите, что $\log_{\sqrt{a}} b = 2x$

4) Пусть $x = \log_a b$. Докажите, что $\log_{a^2} b^3 = \dfrac{3}{2} x$

5) Пусть $x = \log_2 3$, $y = \log_3 4$. Докажите, что $\log_2 4 = 2xy$

6) Пусть $x = \log_2 3$, $y = \log_2 5$. Докажите, что $\log_2 15 = x + y$

Практика по блоку 3

Теория

В этом блоке мы научились упрощать логарифмические выражения и доказывать тождества. Основные приёмы:

- Упрощение выражений с одним логарифмом (глава 11)
- Упрощение выражений с несколькими логарифмами (глава 12)
- Приведение к одному основанию (глава 13)
- Выражения с натуральными логарифмами (глава 14)
- Доказательство тождеств (глава 15)

В этой главе собраны задачи на все эти темы вперемешку. Ваша задача — определить, какой приём (или комбинацию приёмов) нужно применить в каждом конкретном случае.

Задачи

1. Упростите выражение:

1) $\log_2 8 + \log_2 4$

2) $\log_3 27 - \log_3 9$

3) $\log_5 25 \cdot \log_5 125$

4) $\dfrac{\log_2 16}{\log_2 4}$

5) $\log_2 \sqrt{8}$

6) $\log_3 \sqrt[3]{27}$

7) $\log_2 3 + \log_2 5 - \log_2 7$

8) $2\log_2 3 + 3\log_2 5$

9) $\frac{1}{2}\log_2 3 - \frac{1}{3}\log_2 5$

10) $\log_2 3 + \log_4 9$

11) $\log_3 4 + \log_9 16$

12) $\log_5 6 + \log_{25} 36$

2. Упростите выражение и найдите его значение:

1) $\log_2 3 \cdot \log_3 4$

2) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5$

3) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 2$

4) $\log_4 8 \cdot \log_8 16$

5) $\log_9 27 \cdot \log_{27} 81$

6) $\log_2 3 + \log_4 9 - 2$

7) $\log_3 4 + \log_9 16 - 3$

8) $\log_5 6 + \log_{25} 36 - 4$

9) $\frac{\log_2 3}{\log_2 4} + \frac{\log_3 4}{\log_3 5}$

10) $\frac{\log_2 3}{\log_4 3} + \frac{\log_3 4}{\log_5 4}$

11) $\log_2 \sqrt{2} + \log_2 \sqrt{3} - \log_2 \sqrt{5}$

12) $\log_3 \sqrt{3} + \log_3 \sqrt{4} - \log_3 \sqrt{5}$

3. Упростите выражение с натуральными логарифмами:

1) $\ln 2 + \ln 3$

2) $\ln 5 - \ln 2$

3) $\ln 2 + \ln 3 - \ln 5$

4) $2\ln 3 + 3\ln 2$

5) $\frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{3}\ln 2$

6) $\ln e^2 + \ln e^3 - \ln e^4$

7) $\ln \frac{e^2\sqrt{e}}{e^3}$

8) $e^{\ln 2} + e^{\ln 3}$

9) $e^{\ln 2} \cdot e^{\ln 3}$

10) $\frac{e^{\ln 5}}{e^{\ln 2}}$

11) $\ln \frac{x^2 y}{z^3}$

12) $\ln \sqrt{\frac{x^3}{y^2}}$

4. Приведите к одному основанию и упростите:

1) $\log_2 3 + \log_8 27$

2) $\log_3 4 + \log_9 16$

3) $\log_4 5 + \log_{16} 25$

4) $\log_2 3 - \log_4 9$

5) $\log_3 4 - \log_9 16$

6) $\log_4 5 - \log_{16} 25$

7) $\log_2 3 \cdot \log_8 27$

8) $\log_3 4 \cdot \log_9 16$

9) $\log_4 5 \cdot \log_{16} 25$

10) $\frac{\log_2 3}{\log_8 27}$

11) $\frac{\log_3 4}{\log_9 16}$

12) $\frac{\log_4 5}{\log_{16} 25}$

5. Докажите тождество:

1) $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$

2) $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

3) $\log_a b^n = n \log_a b$

4) $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$

5) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$

6) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$

7) $\log_a \frac{b}{c} + \log_a \frac{c}{d} + \log_a \frac{d}{b} = 0$

8) $\log_a b + \log_{a^2} b + \log_{a^3} b = \frac{11}{6} \log_a b$

9) $\log_a \sqrt{b} + \log_a \sqrt{c} = \log_a \sqrt{bc}$

10) $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$

11) $\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$

12) $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$

6. Найдите значение выражения (комбинированные задачи):

1) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$

2) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 2 - 1$

3) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 2$

4) $\log_4 9 \cdot \log_9 16 \cdot \log_{16} 25 \cdot \log_{25} 2$

5) $\log_8 27 \cdot \log_9 16 \cdot \log_4 3 \cdot \log_3 2$

6) $\frac{\log_2 3}{\log_2 4} + \frac{\log_3 4}{\log_3 5} + \frac{\log_4 5}{\log_4 6}$

7) $\frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_3 4} + \frac{1}{\log_4 5} + \frac{1}{\log_5 6}$

8) $\ln 2 + \ln 3 + \ln 5 - \ln 30$

9) $\ln \sqrt{2+\sqrt{3}} + \ln \sqrt{2-\sqrt{3}}$

10) $e^{\ln 2 + \ln 3} \cdot e^{-\ln 5}$

11) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 + \log_3 4 \cdot \log_4 5 + \log_4 5 \cdot \log_5 6$

12) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 6 \cdot \log_6 8 \cdot \log_8 2$

7. Решите уравнение (используя свойства логарифмов):

1) $\log_2 x + \log_2 3 = \log_2 15$

2) $\log_3 x - \log_3 4 = \log_3 5$

3) $\log_5(x+1) + \log_5(x-1) = \log_5 8$

4) $\lg(x+2) - \lg 3 = \lg 5$

5) $\ln(x-1) + \ln 2 = \ln(3x-5)$

6) $\log_2(x-2) + \log_2(x-3) = 1$

7) $\log_3(x+2) - \log_3(x-1) = 1$

8) $\log_2 x + \log_4 x = 3$

9) $\log_3 x + \log_9 x = 6$

10) $\log_2 x \cdot \log_2 \frac{x}{4} = 3$

11) $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$

12) $\log_3^2 x - \log_3 x - 6 = 0$

Сравнение логарифмов с одинаковыми основаниями

Теория

В этой главе мы научимся сравнивать логарифмы с одинаковыми основаниями. Это важно для решения неравенств и для оценки выражений.

Основное правило:

Для логарифмов с одинаковым основанием $a > 0$, $a \neq 1$:

- Если $a > 1$, то функция $y = \log_a x$ возрастает. Значит:

$$\log_a b > \log_a c \quad \Leftrightarrow \quad b > c$$

- Если $0 < a < 1$, то функция $y = \log_a x$ убывает. Значит:

$$\log_a b > \log_a c \quad \Leftrightarrow \quad b < c$$

Сравнение с нулём:

- $\log_a b > 0$ означает, что $b > 1$ при $a > 1$, или $0 < b < 1$ при $0 < a < 1$.
- $\log_a b < 0$ означает, что $0 < b < 1$ при $a > 1$, или $b > 1$ при $0 < a < 1$.
- $\log_a b = 0$ тогда и только тогда, когда $b = 1$.

Сравнение с единицей:

- $\log_a b > 1$ означает, что $b > a$ при $a > 1$, или $b < a$ при $0 < a < 1$.
- $\log_a b < 1$ означает, что $0 < b < a$ при $a > 1$, или $b > a$ при $0 < a < 1$.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Сравнение при $a > 1$

Сравним $\log_2 5$ и $\log_2 3$.

Основание $2 > 1$, функция возрастает. Так как $5 > 3$, то $\log_2 5 > \log_2 3$.

Пример 2

Сравнение при $0 < a < 1$

Сравним $\log_{0.5} 4$ и $\log_{0.5} 2$.

Основание $0.5 < 1$, функция убывает. Так как $4 > 2$, то $\log_{0.5} 4 < \log_{0.5} 2$.

Пример 3

Сравнение с нулём

Определим знак $\log_3 0.2$.

Основание $3 > 1$, $0.2 < 1$, значит $\log_3 0.2 < 0$.

Определим знак $\log_{0.5} 3$.

Основание $0.5 < 1$, $3 > 1$, значит $\log_{0.5} 3 < 0$ (проверим: при убывающей функции числа больше 1 дают отрицательный логарифм).

Пример 4

Сравнение с единицей

Сравним $\log_2 3$ с 1.

Так как $3 > 2$, то $\log_2 3 > 1$.

Сравним $\log_{0.5} 0.2$ с 1.

Основание $0.5 < 1$, $0.2 < 0.5$, поэтому $\log_{0.5} 0.2 > 1$ (при убывающей функции меньшему числу соответствует больший логарифм).

Пример 5

Расположение в порядке возрастания

Расположим числа в порядке возрастания:

$$\log_2 0.5,\ \log_2 3,\ \log_2 1,\ \log_2 0.2$$

Основание $2 > 1$, поэтому чем больше аргумент, тем больше логарифм. Упорядочим аргументы: $0.2 < 0.5 < 1 < 3$. Значит:

$$\log_2 0.2 < \log_2 0.5 < \log_2 1 < \log_2 3$$

Пример 6

Сравнение с промежуточным числом

Сравним $\log_2 5$ и $\log_3 7$. Здесь основания разные — эту задачу мы рассмотрим в следующей главе. А пока сравним $\log_2 5$ и $\log_2 8$:

$$\log_2 5 < \log_2 8 = 3$$

Пример 7

Доказательство неравенства

Докажем, что $\log_2 3 > \log_2 2.5$.

Так как $3 > 2.5$ и основание $2 > 1$, то $\log_2 3 > \log_2 2.5$.

Задачи

1. Сравните числа (основания одинаковые):

1) $\log_2 3$ и $\log_2 5$
2) $\log_2 7$ и $\log_2 4$
3) $\log_3 5$ и $\log_3 2$
4) $\log_3 8$ и $\log_3 9$
5) $\log_5 10$ и $\log_5 6$
6) $\log_5 2$ и $\log_5 7$
7) $\log_{0.5} 2$ и $\log_{0.5} 3$
8) $\log_{0.5} 4$ и $\log_{0.5} 1$
9) $\log_{0.2} 5$ и $\log_{0.2} 3$
10) $\log_{0.2} 10$ и $\log_{0.2} 8$
11) $\log_{1.5} 2$ и $\log_{1.5} 3$
12) $\log_{1.5} 0.5$ и $\log_{1.5} 0.8$

2. Определите знак числа:

1) $\log_2 0.3$
2) $\log_2 1.2$
3) $\log_3 0.7$
4) $\log_3 2.5$
5) $\log_5 0.4$
6) $\log_5 1.5$
7) $\log_{0.5} 2$
8) $\log_{0.5} 0.3$
9) $\log_{0.2} 5$
10) $\log_{0.2} 0.1$
11) $\log_{1.2} 0.8$
12) $\log_{1.2} 1.5$

3. Сравните с единицей:

1) $\log_2 3$ и 1
2) $\log_2 1.5$ и 1
3) $\log_3 4$ и 1
4) $\log_3 2$ и 1
5) $\log_5 6$ и 1
6) $\log_5 4$ и 1
7) $\log_{0.5} 0.3$ и 1
8) $\log_{0.5} 0.8$ и 1
9) $\log_{0.2} 0.1$ и 1
10) $\log_{0.2} 0.5$ и 1
11) $\log_{1.2} 1.5$ и 1
12) $\log_{1.2} 0.9$ и 1

4. Расположите числа в порядке возрастания:

1) $\log_2 0.3$, $\log_2 0.5$, $\log_2 1$, $\log_2 2$, $\log_2 3$

2) $\log_3 0.2$, $\log_3 0.7$, $\log_3 1$, $\log_3 2$, $\log_3 4$

3) $\log_5 0.1$, $\log_5 0.4$, $\log_5 1$, $\log_5 3$, $\log_5 6$

4) $\log_{0.5} 0.1$, $\log_{0.5} 0.3$, $\log_{0.5} 1$, $\log_{0.5} 2$, $\log_{0.5} 4$

5) $\log_{0.2} 0.1$, $\log_{0.2} 0.5$, $\log_{0.2} 1$, $\log_{0.2} 3$, $\log_{0.2} 5$

6) $\log_{1.5} 0.5$, $\log_{1.5} 0.8$, $\log_{1.5} 1$, $\log_{1.5} 1.5$, $\log_{1.5} 2$

5. Докажите неравенство:

1) $\log_2 3 < \log_2 4$

2) $\log_3 5 > \log_3 4$

3) $\log_5 2 < \log_5 3$

4) $\log_{0.5} 2 > \log_{0.5} 3$

5) $\log_{0.2} 0.5 < \log_{0.2} 0.3$

6) $\log_{1.2} 1.5 > \log_{1.2} 1.2$

7) $\log_2 3 > 1$

8) $\log_3 2 < 1$

9) $\log_5 0.2 < 0$

10) $\log_{0.5} 0.2 > 0$

11) $\log_{0.2} 5 < -1$

12) $\log_{1.5} 0.8 < 0$

6. Найдите все x, при которых выполняется неравенство:

1) $\log_2 x > \log_2 3$

2) $\log_2 x < \log_2 5$

3) $\log_3 x > \log_3 2$

4) $\log_3 x < \log_3 7$

5) $\log_5 x > 0$

6) $\log_5 x < 0$

7) $\log_{0.5} x > \log_{0.5} 2$

8) $\log_{0.5} x < \log_{0.5} 3$

9) $\log_{0.2} x > 0$

10) $\log_{0.2} x < 0$

11) $\log_2 x > 1$

12) $\log_2 x < 1$

Сравнение логарифмов с разными основаниями

Теория

В этой главе мы научимся сравнивать логарифмы с разными основаниями. Это более сложная задача, которая часто требует применения различных приёмов.

Основные методы сравнения:

1. **Приведение к одному основанию.** Если удаётся выразить оба логарифма через одно основание, сравнение сводится к сравнению аргументов с учётом монотонности.
2. **Сравнение с промежуточным числом.** Часто в качестве промежуточного числа используют 0, 1 или другое удобное значение.
3. **Метод рационализации.** Используется для сравнения выражений вида $\log_a b$ и $\log_c d$ путём перехода к сравнению $(a-1)(b-1)$ и $(c-1)(d-1)$ при определённых условиях.
4. **Графический метод.** Представление логарифмических функций и сравнение их значений при одинаковых аргументах.

Полезные соотношения:

- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
- $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$
- При $a > 1$ и $b > 1$: $\log_a b > 0$
- При $0 < a < 1$ и $b > 1$: $\log_a b < 0$
- При $a > 1$ и $0 < b < 1$: $\log_a b < 0$
- При $0 < a < 1$ и $0 < b < 1$: $\log_a b > 0$

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Сравнение с помощью приведения к общему основанию

Сравним $\log_2 3$ и $\log_4 8$.

Приведём второй логарифм к основанию 2: $\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2} = 1.5$.

Первый логарифм: $\log_2 3 \approx 1.585$. Так как $1.585 > 1.5$, то $\log_2 3 > \log_4 8$.

Пример 2

Сравнение с помощью промежуточного числа

Сравним $\log_2 3$ и $\log_3 5$.

Оценим каждый логарифм: $\log_2 3$ — это число между 1 и 2, так как $2^1 = 2$, $2^2 = 4$. $\log_3 5$ — это число между 1 и 2, так как $3^1 = 3$, $3^2 = 9$.

Возьмём промежуточное число 1.5. Сравним с ним: $2^{1.5} = 2 \cdot \sqrt{2} \approx 2.828 < 3$, значит $\log_2 3 > 1.5$. $3^{1.5} = 3 \cdot \sqrt{3} \approx 5.196 > 5$, значит $\log_3 5 < 1.5$.

Таким образом, $\log_2 3 > 1.5 > \log_3 5$, поэтому $\log_2 3 > \log_3 5$.

Пример 3

Сравнение с помощью перехода к натуральным логарифмам

Сравним $\log_2 5$ и $\log_3 7$.

Перейдём к натуральным логарифмам: $\log_2 5 = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx \frac{1.609}{0.693} \approx 2.322$ $\log_3 7 = \frac{\ln 7}{\ln 3} \approx \frac{1.946}{1.099} \approx 1.771$

Значит, $\log_2 5 > \log_3 7$.

Пример 4

Сравнение с нулём

Сравним $\log_2 0.3$ и $\log_3 0.4$.

Оба логарифма отрицательны, так как аргументы меньше 1, а основания больше 1. Нужно сравнить их по модулю.

$\log_2 0.3 = -\log_2 \frac{10}{3} \approx -1.737$ $\log_3 0.4 = -\log_3 \frac{5}{2} \approx -0.834$

Так как $-1.737 < -0.834$, то $\log_2 0.3 < \log_3 0.4$.

Пример 5

Сравнение с единицей

Сравним $\log_2 1.8$ и $\log_3 2.5$.

$\log_2 1.8$ — чуть меньше 1, так как $2^1 = 2 > 1.8$. $\log_3 2.5$ — чуть больше 1, так как $3^1 = 3 > 2.5$, но $2.5 > 3^{0.5} \approx 1.732$, значит $\log_3 2.5 > 0.5$, но точно сказать трудно. Оценим точнее: $2^{0.85} \approx 1.80$, значит $\log_2 1.8 \approx 0.85$ $3^{0.83} \approx 2.49$, значит $\log_3 2.5 \approx 0.83$

Получается, $\log_2 1.8 > \log_3 2.5$.

Пример 6

Метод рационализации

Сравним $\log_2 3$ и $\log_3 5$.

Рассмотрим разность $(2-1)(3-1) = 2$ и $(3-1)(5-1) = 8$. Так как $2 < 8$, то $\log_2 3 < \log_3 5$? Этот метод требует осторожности и работает не всегда. Лучше использовать численные методы или промежуточные числа.

Пример 7

Графический метод

Нарисуем графики функций $y = \log_2 x$ и $y = \log_3 x$. При $x > 1$ график $\log_2 x$ лежит выше графика $\log_3 x$, так как основание 2 меньше основания 3. Значит, при $x > 1$ $\log_2 x > \log_3 x$.

Это можно использовать для сравнения: например, $\log_2 5 > \log_3 5$.

Задачи

1. Сравните числа (приведите к одному основанию):

1) $\log_2 3$ и $\log_4 9$
2) $\log_3 4$ и $\log_9 16$
3) $\log_5 6$ и $\log_{25} 36$
4) $\log_2 5$ и $\log_8 125$
5) $\log_3 7$ и $\log_9 49$
6) $\log_4 7$ и $\log_{16} 49$
7) $\log_2 8$ и $\log_4 16$
8) $\log_3 27$ и $\log_9 81$
9) $\log_5 125$ и $\log_{25} 625$

2. Сравните числа (с помощью перехода к натуральным логарифмам):

1) $\log_2 5$ и $\log_3 7$
2) $\log_2 7$ и $\log_3 8$
3) $\log_2 9$ и $\log_3 10$
4) $\log_3 5$ и $\log_4 6$
5) $\log_3 7$ и $\log_4 8$
6) $\log_3 10$ и $\log_4 12$
7) $\log_4 5$ и $\log_5 6$
8) $\log_4 7$ и $\log_5 8$
9) $\log_4 9$ и $\log_5 10$

3. Сравните числа (с помощью промежуточного числа):

1) $\log_2 3$ и $\log_3 4$
2) $\log_2 4$ и $\log_3 5$
3) $\log_2 5$ и $\log_3 6$
4) $\log_2 6$ и $\log_3 7$
5) $\log_2 7$ и $\log_3 8$
6) $\log_2 8$ и $\log_3 9$

7) $\log_2 9$ и $\log_3 10$

8) $\log_2 10$ и $\log_3 11$

9) $\log_2 11$ и $\log_3 12$

4. Сравните числа (с учётом знака):

1) $\log_2 0.3$ и $\log_3 0.4$

2) $\log_2 0.5$ и $\log_3 0.6$

3) $\log_2 0.7$ и $\log_3 0.8$

4) $\log_2 0.2$ и $\log_3 0.3$

5) $\log_2 0.4$ и $\log_3 0.5$

6) $\log_2 0.6$ и $\log_3 0.7$

7) $\log_{0.5} 2$ и $\log_{0.3} 2$

8) $\log_{0.5} 3$ и $\log_{0.3} 3$

9) $\log_{0.5} 4$ и $\log_{0.3} 4$

5. Расположите числа в порядке возрастания:

1) $\log_2 3, \log_3 4, \log_4 5, \log_5 6$

2) $\log_2 4, \log_3 5, \log_4 6, \log_5 7$

3) $\log_2 5, \log_3 6, \log_4 7, \log_5 8$

4) $\log_2 0.5, \log_3 0.5, \log_4 0.5, \log_5 0.5$

5) $\log_2 0.3, \log_3 0.4, \log_4 0.5, \log_5 0.6$

6) $\log_{0.5} 2, \log_{0.5} 3, \log_{0.5} 4, \log_{0.5} 5$

6. Докажите неравенство:

1) $\log_2 3 > \log_3 4$

2) $\log_2 4 > \log_3 5$

3) $\log_2 5 > \log_3 6$

4) $\log_3 4 > \log_4 5$

5) $\log_3 5 > \log_4 6$

6) $\log_3 6 > \log_4 7$

7) $\log_2 \pi > \log_3 \pi$

8) $\log_2 e < \log_3 e$

9) $\log_2 10 > \log_3 10$

7. Задачи повышенной сложности:

1) Сравните $\log_2 3$ и $\log_3 5$ (без калькулятора)

2) Сравните $\log_3 4$ и $\log_4 5$

3) Сравните $\log_2 5$ и $\log_5 2$

4) Сравните $\log_2 3 + \log_3 2$ и 2

5) Сравните $\log_2 3 \cdot \log_3 4$ и $\log_2 4$

6) Сравните $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5$ и $\log_2 5$

7) Докажите, что $\log_2 3 + \log_3 4 > 2$

8) Докажите, что $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 > 1$

9) Найдите наибольшее из чисел: $\log_2 3, \log_3 4, \log_4 5, \log_5 6$

Сравнение логарифмов с числами

Теория

В этой главе мы научимся сравнивать логарифмы с числами. Это важный навык для решения неравенств и оценки выражений.

Основные методы сравнения:

1. **Сравнение с 0:**
   - $\log_a b > 0$ тогда и только тогда, когда $a > 1$ и $b > 1$, или $0 < a < 1$ и $0 < b < 1$.
   - $\log_a b < 0$ тогда и только тогда, когда $a > 1$ и $0 < b < 1$, или $0 < a < 1$ и $b > 1$.
2. **Сравнение с 1:**
   - $\log_a b > 1$ тогда и только тогда, когда $a > 1$ и $b > a$, или $0 < a < 1$ и $b < a$.
   - $\log_a b < 1$ тогда и только тогда, когда $a > 1$ и $0 < b < a$, или $0 < a < 1$ и $b > a$.
3. **Сравнение с произвольным числом c:**
   - $\log_a b > c$ равносильно $b > a^c$ при $a > 1$, или $b < a^c$ при $0 < a < 1$.
   - $\log_a b < c$ равносильно $b < a^c$ при $a > 1$, или $b > a^c$ при $0 < a < 1$.

Полезные опорные точки:

- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a^2 = 2$, $\log_a \sqrt{a} = \frac{1}{2}$ и т.д.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Сравнение с 0

Сравним $\log_2 3$ с 0.
Основание $2 > 1$, аргумент $3 > 1$, значит $\log_2 3 > 0$.
Сравним $\log_2 0.3$ с 0.
Основание $2 > 1$, аргумент $0.3 < 1$, значит $\log_2 0.3 < 0$.
Сравним $\log_{0.5} 2$ с 0.
Основание $0.5 < 1$, аргумент $2 > 1$, значит $\log_{0.5} 2 < 0$.
Сравним $\log_{0.5} 0.3$ с 0.
Основание $0.5 < 1$, аргумент $0.3 < 1$, значит $\log_{0.5} 0.3 > 0$.

Пример 2

Сравнение с 1

Сравним $\log_2 3$ с 1.
Основание $2 > 1$, сравниваем аргумент с основанием: $3 > 2$, значит $\log_2 3 > 1$.
Сравним $\log_2 1.5$ с 1.
$1.5 < 2$, значит $\log_2 1.5 < 1$.
Сравним $\log_{0.5} 0.3$ с 1.
Основание $0.5 < 1$, сравниваем аргумент с основанием: $0.3 < 0.5$, значит при убывающей функции $\log_{0.5} 0.3 > 1$.
Сравним $\log_{0.5} 0.8$ с 1.
$0.8 > 0.5$, значит $\log_{0.5} 0.8 < 1$.

Пример 3

Сравнение с 2

Сравним $\log_2 5$ с 2.
Так как $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, и 5 между 4 и 8, то $\log_2 5$ между 2 и 3. Значит $\log_2 5 > 2$.
Сравним $\log_2 3$ с 2.
$3 < 4$, значит $\log_2 3 < 2$.
Сравним $\log_{0.5} 0.1$ с 2.
При основании $0.5 < 1$ функция убывает. $(0.5)^2 = 0.25$, $0.1 < 0.25$, значит $\log_{0.5} 0.1 > 2$.

Пример 4

Сравнение с помощью возведения в степень

Сравним $\log_2 7$ и 2.5.
Проверим, больше или меньше 2.5: $2^{2.5} = 2^2 \cdot 2^{0.5} = 4 \cdot \sqrt{2} \approx 4 \cdot 1.414 = 5.656$ Так как $7 > 5.656$, то $\log_2 7 > 2.5$.

Пример 5

Сравнение с целым числом

Сравним $\log_3 20$ с 2 и 3.
$3^2 = 9$, $3^3 = 27$, 20 между ними, значит $2 < \log_3 20 < 3$.
Сравним с 2.5: $3^{2.5} = 3^2 \cdot 3^{0.5} = 9 \cdot \sqrt{3} \approx 9 \cdot 1.732 = 15.588$ $20 > 15.588$, значит $\log_3 20 > 2.5$.

Пример 6

Оценка суммы логарифмов

Оценим $\log_2 3 + \log_2 5$.
$\log_2 3 \approx 1.585$, $\log_2 5 \approx 2.322$, сумма ≈ 3.907. Сравним с 4: $2^4 = 16$, а $3 \cdot 5 = 15 < 16$, значит сумма меньше 4.

Пример 7

Сравнение с помощью свойств

Сравним $\log_2 6$ и $1 + \log_2 3$.
$1 + \log_2 3 = \log_2 2 + \log_2 3 = \log_2(2 \cdot 3) = \log_2 6$. Значит, они равны.

Задачи

1. Сравните с нулём:

1) $\log_2 5$ **4)** $\log_3 0.5$ **7)** $\log_{0.5} 3$ **10)** $\log_{0.2} 0.1$
2) $\log_2 0.7$ **5)** $\log_5 6$ **8)** $\log_{0.5} 0.4$ **11)** $\log_{1.5} 2$
3) $\log_3 4$ **6)** $\log_5 0.2$ **9)** $\log_{0.2} 5$ **12)** $\log_{1.5} 0.8$

2. Сравните с единицей:

1) $\log_2 3$ **4)** $\log_3 2$ **7)** $\log_{0.5} 0.3$ **10)** $\log_{0.2} 0.5$
2) $\log_2 1.5$ **5)** $\log_5 6$ **8)** $\log_{0.5} 0.8$ **11)** $\log_{1.2} 1.5$
3) $\log_3 4$ **6)** $\log_5 4$ **9)** $\log_{0.2} 0.1$ **12)** $\log_{1.2} 0.9$

3. Сравните с двойкой:

1) $\log_2 5$ **3)** $\log_3 10$ **5)** $\log_4 20$ **7)** $\log_5 30$
2) $\log_2 3$ **4)** $\log_3 8$ **6)** $\log_4 15$ **8)** $\log_5 20$

9) $\log_{0.5} 0.2$ **10)** $\log_{0.5} 0.3$ **11)** $\log_{0.2} 0.03$ **12)** $\log_{0.2} 0.05$

4. Сравните с указанным числом:

1) $\log_2 10$ и 3

2) $\log_2 7$ и 2.5

3) $\log_3 25$ и 3

4) $\log_3 20$ и 2.5

5) $\log_4 30$ и 2.5

6) $\log_4 40$ и 2.5

7) $\log_5 100$ и 3

8) $\log_5 80$ и 2.5

9) $\log_6 200$ и 3

10) $\log_7 300$ и 3

11) $\log_8 400$ и 3

12) $\log_9 500$ и 3

5. Оцените значение выражения (укажите между какими целыми числами оно находится):

1) $\log_2 10$

2) $\log_2 15$

3) $\log_2 20$

4) $\log_3 20$

5) $\log_3 30$

6) $\log_3 40$

7) $\log_4 30$

8) $\log_4 50$

9) $\log_5 100$

10) $\log_5 200$

11) $\log_6 200$

12) $\log_7 300$

6. Сравните выражения:

1) $\log_2 3 + \log_2 4$ и $\log_2 7$

2) $\log_2 3 + \log_2 5$ и $\log_2 15$

3) $\log_2 3 + \log_2 4$ и 3

4) $\log_2 5 + \log_2 6$ и $\log_2 30$

5) $\log_2 5 + \log_2 6$ и 4

6) $\log_3 4 + \log_3 5$ и $\log_3 20$

7) $\log_3 4 + \log_3 5$ и 3

8) $\log_4 5 + \log_4 6$ и $\log_4 30$

9) $\log_4 5 + \log_4 6$ и 2

10) $\log_2 3 \cdot \log_2 4$ и $\log_2 12$

11) $\log_2 3 \cdot \log_2 5$ и $\log_2 15$

12) $\log_2 3 \cdot \log_2 4$ и 2

7. Задачи повышенной сложности:

1) Докажите, что $1 < \log_2 3 < 2$

2) Докажите, что $2 < \log_3 10 < 3$

3) Докажите, что $2 < \log_5 30 < 3$

4) Найдите целую часть числа $\log_2 100$

5) Найдите целую часть числа $\log_3 200$

6) Найдите целую часть числа $\log_5 1000$

7) Сколько цифр в числе 2^{100}? (используйте $\log_{10} 2$)

8) Сколько цифр в числе 3^{50}?

9) Сколько цифр в числе 5^{40}?

10) Какое число больше: 2^{100} или 3^{60}? (используйте логарифмы)

11) Какое число больше: 10^{30} или 2^{100}?

12) Какое число больше: e^{π} или π^{e}?

Практика по блоку 4

Теория

В этом блоке мы научились сравнивать логарифмы:

- Сравнение логарифмов с одинаковыми основаниями (глава 17)
- Сравнение логарифмов с разными основаниями (глава 18)
- Сравнение логарифмов с числами (глава 19)

Основные приёмы:

- Учёт монотонности логарифмической функции в зависимости от основания
- Приведение к одному основанию
- Использование промежуточных чисел (0, 1, 2 и т.д.)
- Переход к сравнению аргументов с соответствующими степенями

В этой главе собраны задачи на все эти темы вперемешку. Ваша задача — определить, какой приём нужно применить в каждом конкретном случае.

Задачи

1. Сравните числа (одинаковые основания):

1) $\log_2 3$ и $\log_2 5$
2) $\log_2 7$ и $\log_2 4$
3) $\log_3 5$ и $\log_3 2$
4) $\log_3 8$ и $\log_3 9$
5) $\log_5 10$ и $\log_5 6$
6) $\log_5 2$ и $\log_5 7$
7) $\log_{0.5} 2$ и $\log_{0.5} 3$
8) $\log_{0.5} 4$ и $\log_{0.5} 1$
9) $\log_{0.2} 5$ и $\log_{0.2} 3$
10) $\log_{0.2} 10$ и $\log_{0.2} 8$
11) $\log_{1.5} 2$ и $\log_{1.5} 3$
12) $\log_{1.5} 0.5$ и $\log_{1.5} 0.8$

2. Сравните с нулём:

1) $\log_2 0.3$
2) $\log_2 1.2$
3) $\log_3 0.7$
4) $\log_3 2.5$
5) $\log_5 0.4$
6) $\log_5 1.5$
7) $\log_{0.5} 2$
8) $\log_{0.5} 0.3$
9) $\log_{0.2} 5$
10) $\log_{0.2} 0.1$
11) $\log_{1.2} 0.8$
12) $\log_{1.2} 1.5$

3. Сравните с единицей:

1) $\log_2 3$
2) $\log_2 1.5$
3) $\log_3 4$
4) $\log_3 2$
5) $\log_5 6$
6) $\log_5 4$
7) $\log_{0.5} 0.3$
8) $\log_{0.5} 0.8$
9) $\log_{0.2} 0.1$
10) $\log_{0.2} 0.5$
11) $\log_{1.2} 1.5$
12) $\log_{1.2} 0.9$

4. Сравните числа (разные основания):

1) $\log_2 3$ и $\log_3 4$
2) $\log_2 4$ и $\log_3 5$
3) $\log_2 5$ и $\log_3 6$
4) $\log_2 6$ и $\log_3 7$
5) $\log_2 7$ и $\log_3 8$
6) $\log_2 8$ и $\log_3 9$
7) $\log_3 4$ и $\log_4 5$
8) $\log_3 5$ и $\log_4 6$
9) $\log_3 6$ и $\log_4 7$
10) $\log_4 5$ и $\log_5 6$
11) $\log_4 6$ и $\log_5 7$
12) $\log_4 7$ и $\log_5 8$

5. Сравните с указанным числом:

1) $\log_2 10$ и 3

2) $\log_2 7$ и 2.5

3) $\log_3 25$ и 3

4) $\log_3 20$ и 2.5

5) $\log_4 30$ и 2.5

6) $\log_4 40$ и 2.5

7) $\log_5 100$ и 3

8) $\log_5 80$ и 2.5

9) $\log_6 200$ и 3

10) $\log_7 300$ и 3

11) $\log_8 400$ и 3

12) $\log_9 500$ и 3

6. Оцените значение выражения (укажите между какими целыми числами оно находится):

1) $\log_2 10$

2) $\log_2 15$

3) $\log_2 20$

4) $\log_3 20$

5) $\log_3 30$

6) $\log_3 40$

7) $\log_4 30$

8) $\log_4 50$

9) $\log_5 100$

10) $\log_5 200$

11) $\log_6 200$

12) $\log_7 300$

7. Расположите числа в порядке возрастания:

1) $\log_2 3, \log_3 4, \log_4 5, 1$

2) $\log_2 5, \log_3 5, \log_5 5, 1$

3) $\log_2 0.5, \log_3 0.5, \log_5 0.5, 0$

4) $\log_2 0.3, \log_2 0.5, \log_2 0.7, \log_2 0.9$

5) $\log_{0.5} 2, \log_{0.5} 3, \log_{0.5} 4, \log_{0.5} 5$

6) $\log_2 3, \log_3 4, \log_4 5, \log_5 6$

8. Докажите неравенство:

1) $\log_2 3 > 1.5$

2) $\log_2 5 < 2.5$

3) $\log_3 10 > 2$

4) $\log_3 8 < 2$

5) $\log_4 15 > 2$

6) $\log_4 12 < 2$

7) $\log_2 3 + \log_2 4 > 3$

8) $\log_2 3 + \log_2 5 < 4$

9) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 = 2$

10) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 > 2$

11) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 = \log_2 5$

12) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 > 1$

9. Задачи повышенной сложности:

1) Какое число больше: $\log_2 3$ или $\log_3 5$?

2) Какое число больше: $\log_2 4$ или $\log_3 8$?

3) Какое число больше: $\log_2 5$ или $\log_5 2$?

4) Какое число больше: $\log_2 3 + \log_3 2$ или 2?

5) Какое число больше: $\log_2 3 \cdot \log_3 4$ или $\log_2 4$?

6) Сколько цифр в числе 2^{100}?

7) Сколько цифр в числе 3^{80}?

8) Сколько цифр в числе 5^{60}?

9) Какое число больше: 2^{100} или 3^{60}?

10) Какое число больше: 10^{30} или 2^{100}?

11) Какое число больше: e^{π} или π^{e}?

12) Какое число больше: $\log_2 3$ или $\log_3 2$?

Практика на все-все приёмы

Теория

Мы изучили все основные темы, связанные с логарифмическими выражениями:

- Определение логарифма и простейшие свойства
- Основные свойства: логарифм произведения, частного, степени, корня
- Переход к новому основанию
- Упрощение выражений с одним и несколькими логарифмами
- Приведение к одному основанию
- Выражения с натуральными логарифмами
- Доказательство тождеств
- Сравнение логарифмов

В этой главе собраны задачи всех типов вперемешку — от простых до сложных. Ваша задача — определить, какой метод или комбинацию методов нужно применить в каждом конкретном случае.

Задачи

1. Найдите значение выражения:

1) $\log_2 8$ **2)** $\log_3 27$ **3)** $\log_5 125$ **4)** $\log_7 343$ **5)** $\log_2 16$ **6)** $\log_3 81$ **7)** $\log_4 64$ **8)** $\log_6 36$ **9)** $\log_2 \dfrac{1}{4}$ **10)** $\log_3 \dfrac{1}{9}$ **11)** $\log_5 \dfrac{1}{25}$ **12)** $\log_7 \dfrac{1}{49}$

2. Упростите выражение:

1) $\log_2 3 + \log_2 5$ **2)** $\log_3 7 - \log_3 4$ **3)** $2\log_2 3 + 3\log_2 5$ **4)** $\frac{1}{2}\log_2 3 - \frac{1}{3}\log_2 5$ **5)** $\log_2 3 + \log_4 9$ **6)** $\log_3 4 + \log_9 16$ **7)** $\log_5 6 + \log_{25} 36$ **8)** $\log_2 \sqrt{8}$ **9)** $\log_3 \sqrt[3]{27}$ **10)** $\log_5 \dfrac{1}{125}$ **11)** $\log_7 \sqrt{49}$ **12)** $\log_4 8 \cdot \log_8 16$

3. Найдите значение выражения (основное логарифмическое тождество):

1) $2^{\log_2 3}$ **2)** $3^{\log_3 7}$ **3)** $5^{\log_5 2}$ **4)** $7^{\log_7 4}$ **5)** $4^{\log_2 3}$ **6)** $9^{\log_3 2}$ **7)** $16^{\log_2 5}$ **8)** $25^{\log_5 2}$ **9)** $8^{\log_2 3}$ **10)** $27^{\log_3 4}$ **11)** $32^{\log_2 3}$ **12)** $81^{\log_3 2}$

4. Упростите выражение с натуральными логарифмами:

1) $\ln 2 + \ln 3$ **2)** $\ln 5 - \ln 2$ **3)** $\ln 2 + \ln 3 - \ln 5$ **4)** $2\ln 3 + 3\ln 2$ **5)** $\frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{3}\ln 2$ **6)** $\ln e^2 + \ln e^3 - \ln e^4$ **7)** $\ln \frac{e^2\sqrt{e}}{e^3}$ **8)** $e^{\ln 2} + e^{\ln 3}$ **9)** $e^{\ln 2} \cdot e^{\ln 3}$

10) $\frac{e^{\ln 5}}{e^{\ln 2}}$

11) $\ln \frac{x^2 y}{z^3}$

12) $\ln \sqrt{\frac{x^3}{y^2}}$

5. Найдите значение выражения (произведение логарифмов):

1) $\log_2 3 \cdot \log_3 4$

2) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5$

3) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 2$

4) $\log_4 8 \cdot \log_8 16$

5) $\log_9 27 \cdot \log_{27} 81$

6) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 2$

7) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 6 \cdot \log_6 2$

8) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 2$

9) $\log_4 9 \cdot \log_9 16 \cdot \log_{16} 25 \cdot \log_{25} 2$

6. Сравните числа:

1) $\log_2 3$ и $\log_2 5$

2) $\log_2 3$ и $\log_3 4$

3) $\log_2 5$ и $\log_3 7$

4) $\log_2 0.3$ и $\log_2 0.5$

5) $\log_2 0.3$ и $\log_3 0.4$

6) $\log_2 3$ и 1.5

7) $\log_2 5$ и 2.3

8) $\log_3 10$ и 2

9) $\log_5 100$ и 3

10) $\log_2 3 + \log_2 4$ и 3

11) $\log_2 3 \cdot \log_3 4$ и 2

12) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5$ и $\log_2 5$

7. Докажите тождество:

1) $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$

2) $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

3) $\log_a b^n = n \log_a b$

4) $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n} \log_a b$

5) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$

6) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$

7) $\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n} \log_a b$

8) $\dfrac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$

9) $\log_a b + \log_{a^2} b = \dfrac{3}{2} \log_a b$

8. Решите уравнение:

1) $\log_2 x + \log_2 3 = \log_2 15$

2) $\log_3 x - \log_3 4 = \log_3 5$

3) $\log_5(x+1) + \log_5(x-1) = \log_5 8$

4) $\lg(x+2) - \lg 3 = \lg 5$

5) $\ln(x-1) + \ln 2 = \ln(3x-5)$

6) $\log_2(x-2) + \log_2(x-3) = 1$

7) $\log_3(x+2) - \log_3(x-1) = 1$

8) $\log_2 x + \log_4 x = 3$

9) $\log_3 x + \log_9 x = 6$

10) $\log_2 x \cdot \log_2 \dfrac{x}{4} = 3$

11) $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$

12) $\log_3^2 x - \log_3 x - 6 = 0$

9. Задачи повышенной сложности:

1) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_{31} 32$

2) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_n(n+1)$

3) $\frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_3 4} + \frac{1}{\log_4 5} + \cdots + \frac{1}{\log_{99} 100}$

4) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 + \log_3 4 \cdot \log_4 5 + \cdots + \log_{99} 100 \cdot \log_{100} 101$

5) $(\log_2 3)^2 + (\log_2 5)^2 - (\log_2 15)^2$

6) $(\log_2 3)^3 + (\log_2 5)^3 + (\log_2 6)^3 - 3\log_2 3 \cdot \log_2 5 \cdot \log_2 6$

7) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 - \log_2 8$

8) $\frac{\log_2 3}{\log_2 4} + \frac{\log_3 4}{\log_3 5} + \frac{\log_4 5}{\log_4 6} + \frac{\log_5 6}{\log_5 7}$

9) $\log_2 3 \cdot \log_4 5 \cdot \log_6 7 \cdot \log_8 9 - \log_2 9$

10) $\log_3 4 \cdot \log_5 6 \cdot \log_7 8 \cdot \log_9 10$

11) $\frac{\log_2 3}{\log_3 2} + \frac{\log_3 4}{\log_4 3} + \frac{\log_4 5}{\log_5 4}$

12) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 2 - 1$

Заключение

Вот мы и добрались до конца книги. Если вы дошли до этих строк и прорешали хотя бы часть задач — значит, вы проделали огромную работу. Поздравляю!

Логарифмы — это тема, которая многих пугает в начале изучения. Странное обозначение, новые свойства, непонятно, зачем это вообще нужно... Но теперь вы знаете, что логарифмы — это просто другой способ записи показательных уравнений, а все их свойства логически вытекают из свойств степеней.

В этой книге мы разобрали все основные приёмы работы с логарифмическими выражениями:

- начали с самого простого — определения логарифма и основного логарифмического тождества;
- научились вычислять логарифмы единицы, основания и степеней основания;
- познакомились с десятичными и натуральными логарифмами;
- изучили основные свойства: логарифм произведения, частного, степени и корня;
- освоили формулу перехода к новому основанию и её следствия;
- научились упрощать сложные выражения, комбинируя разные свойства;
- разобрались с приведением логарифмов к одному основанию;
- поработали с выражениями, содержащими натуральные логарифмы;
- научились доказывать логарифмические тождества;
- и наконец, освоили сравнение логарифмов — важный навык для решения неравенств.

Но главное — мы научились главному: видеть, какое свойство нужно применить в каждом конкретном случае. Потому что в реальных примерах никто не пишет «используйте свойство логарифма произведения» или «здесь нужно привести к одному основанию». Вы просто видите выражение и должны сами понять, как его упростить. И чем больше у вас опыта, тем быстрее приходит это понимание.

Если какие-то темы остались непонятыми — не расстраивайтесь. Вернитесь к ним ещё раз, порешайте дополнительные задачи. Математика не терпит суеты, но она очень благодарна тем, кто проявляет терпение и настойчивость.

А если вам понравился такой формат — теория, примеры, много задач — у меня есть и другие книги. На сайте books.mrepetitor.com вы найдёте пособия по разным темам школьной математики и физики. Там же есть научно-популярные книги, которые я писал для тех учеников, кому интересно не только решать задачи, но и понимать, как устроен окружающий мир, как развивалась наука и какие люди стояли за великими открытиями.

Записаться на мои занятия можно на сайте study.mrepetitor.com. Я продолжаю преподавать математику и физику для школьников с 5 по 11 классы, готовлю к ЕГЭ, ОГЭ и ЦТ. Если чувствуете, что нужна помощь, или хотите подготовиться к экзаменам — обращайтесь!

Желаю вам успехов в учёбе, побольше интересных задач и удовольствия от их решения!

Дмитрий Трепачёв